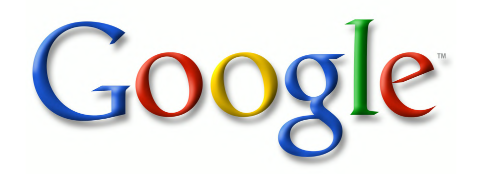


Ankündigung.

… ften
in … rird,
wol … ung
der … ora-
tori … men
Ein … der
Wi … och-
stel … ngel
hin … ihen
Aus … das
Fel … an
Ke … das
Ge …
… ker
der … cher
For … lun-
gen … ren-
den … urch
ein … igen
in … ist
abe … denn
in … lche
inz … dern
es … Ent-
wic … und
For … rube
vor …
… llen
ihr … der
Ma … igen
aus … mie
(ein …
… ssor
Dr. … aben
wer … ssen-
sch … igen
übe … the-

matik Prof. Dr. Wangerin (Halle), für Krystallkunde Prof. Dr. Groth (München), für Pflanzenphysiologie Prof. Dr. W. Pfeffer (Leipzig), für Chemie Prof. Dr. W. Ostwald (Leipzig).

Erschienen sind bis jetzt aus dem Gebiete der

Mathematik:

Nr. 5. **C. F. Gauss,** Flächentheorie. (1827.) Deutsch herausg. v. A. Wangerin. Zweite revidirte Auflage. (64 S.) ℳ —.80.

» 14. **C. F. Gauss,** Die 4 Beweise der Zerlegung ganzer algebr. Functionen etc. (1799—1849.) Herausg. v. E. Netto. Mit 1 Taf. (81 S.) ℳ 1.50.

» 17. **A. Bravais,** Abhandlungen über symmetr. Polyeder. (1849.) Übers. und in Gemeinschaft mit P. Groth herausg. von C. u. E. Blasius. Mit 1 Taf. (50 S.) ℳ 1.—.

» 19. Üb. d. Anziehung homogener Ellipsoide. Abhandlungen von **Laplace** (1782), **Ivory** (1809), **Gauss** (1813), **Chasles** (1838) und **Dirichlet** (1839). Herausg. von A. Wangerin. (118 S.) ℳ 2.—.

» 46. Abhandlungen über Variations-Rechnung. I. Theil: Abhandlungen von **Joh. Bernoulli** (1696), **Jac. Bernoulli** (1697) und **Leonhard Euler** (1744). Herausgegeben von P. Stäckel. Mit 19 Textfiguren. (144 S.) ℳ 2.—.

» 47. —— —— II. Theil: Abhandlungen von **Lagrange** (1762, 1770), **Legendre** (1786) und **Jacobi** (1837). Herausgegeben von P. Stäckel. Mit 12 Textfiguren. (110 S.) ℳ 1.60.

» 60. **Jacob Steiner,** Die geometr. Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichts-Anstalten und zur praktischen Benutzung. (1833.) Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 25 Textfiguren. (85 S.) ℳ 1.20.

» 64. **C. G. J. Jacobi,** Über die vierfach periodischen Functionen zweier Variabeln, auf die sich die Theorie der Abel'schen Transcendenten stützt. (1834.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. (40 S.) ℳ —.70.

» 65. **Georg Rosenhain,** Abhandlung über die Functionen zweier Variabler mit vier Perioden, welche die Inversen sind der ultraelliptischen Integrale erster Klasse. (1851.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Französischen übersetzt von A. Witting. (94 S.) ℳ 1.50.

» 67. **A. Göpel,** Entwurf einer Theorie der Abel'schen Transcendenten erster Ordnung. (1847.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. (60 S.) ℳ 1.—.

» 71. **N. H. Abel,** Untersuchungen über die Reihe:

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{(m\cdot m-1)}{1\cdot 2}\cdot x^2+\frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot x^3+\ldots\ldots$$

(1826.) Herausgegeben von A. Wangerin. (46 S.) ℳ 1.—.

» 73. **Leonhard Euler,** Zwei Abhandlungen über sphärische Trigonometrie. Grundzüge der sphärischen Trigonometrie und allgemeine sphärische Trigonometrie. (1753 u. 1779.) Aus dem Französischen und Lateinischen übersetzt und herausgegeben von E. Hammer. Mit 6 Figuren im Text. (65 S.) ℳ 1.—.

» 77. **C. G. J. Jacobi,** Über die Bildung und die Eigenschaften der Determinanten. (De formatione et proprietatibus Determinantium.) (1841.) Herausgegeben von P. Stäckel. (73 S.) ℳ 1.20.

Nr. 78. **J. C. G. Jacobi**, Über die Functionaldeterminanten. (De determinantibus functionalibus.) (1841.) Herausgegeben von P. Stäckel. (72 S.) ℳ 1.20.

» 82. **Jacob Steiner**, Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, mit Berücksichtigung der Arbeiten alter und neuer Geometer über Porismen, Projections-Methoden, Geometrie der Lage, Transversalen, Dualität und Reciprocität etc. (1832.) I. Theil. Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 2 Tafeln und 14 Fig. im Text. (126 S.) ℳ 2.—.

» 83. —— —— II. Theil. Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 2 Tafeln und 2 Figuren im Text. (162 S.) ℳ 2.40.

» 90. **A. Bravais**, Abhandlung über die Systeme von regelmässig auf einer Ebene oder im Raum vertheilten Punkten. (1848.) Übers. u. herausgegeben von C. u. E. Blasius. Mit 2 Tafeln. (142 S.) ℳ 2.—.

» 91. **G. Lejeune Dirichlet**, Untersuchungen über verschiedene Anwendungen der Infinitesimalanalysis auf die Zahlentheorie. (1839 bis 1840.) Deutsch herausgegeben von R. Haussner. (128 S.) ℳ 2.—.

» 93. **Leonhard Euler**, Drei Abhandlungen über Kartenprojection. (1777). Mit 9 Textfig. Herausg. von A. Wangerin. (78 S.) ℳ. 1.20.

» 103. **Joseph Louis Lagrange's** Zusätze zu Euler's Elementen der Algebra. Unbestimmte Analysis. Aus dem Französischen übersetzt von A. J. von Oettingen, herausg. von H. Weber. (171 S.) ℳ 2.60.

» 107. **Jakob Bernoulli**, Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi). (1713.) I. u. II. Theil. Übersetzt und herausgegeben von R. Haussner. Mit 1 Figur im Text. (162 S.) ℳ 2.50.

» 108. —— —— III. u. IV. Theil mit dem Anhange: Brief an einen Freund über das Ballspiel (Jeu de Paume). Übersetzt und herausgegeben von R. Haussner. Mit 3 Fig. (172 S.) ℳ 2.70.

» 111. **N. H. Abel**, Abhandlung über eine besondere Klasse algebraisch auflösbarer Gleichungen. Herausgegeben von Alfred Loewy. (50 S.) ℳ —.90.

» 112. **Augustin-Louis Cauchy**, Abhandlung über bestimmte Integrale zwischen imaginären Grenzen (1825.). Herausgegeben von P. Stäckel. (80 S.) ℳ 1.25.

» 113. **Lagrange** (1772) und **Cauchy** (1819), Zwei Abhandlungen zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Aus dem Französischen übersetzt und herausgegeben von Dr. Gerhard Kowalewski. (54 S.) ℳ 1.—.

» 116. **Lejeune Dirichlet**, Die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen (1837) und **Philipp Ludwig Seidel**, Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen (1847). Herausgegeben von Heinrich Siebmann. (58 S.) ℳ 1.—.

Die Darstellung
ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen

von

LEJEUNE DIRICHLET
(1837)

und

Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen

von

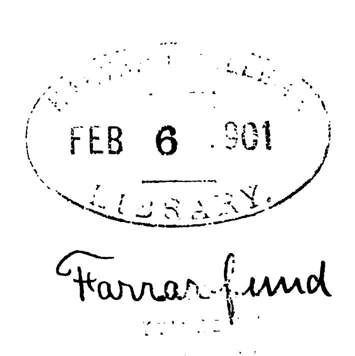
PHILIPP LUDWIG SEIDEL.
(1847.)

Herausgegeben

von

Heinrich Liebmann.

LEIPZIG
VERLAG VON WILHELM ENGELMANN
1900.


FEB 6 1901
LIBRARY.
Farrar fund

[152]

Ueber die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen.

Von

Lejeune Dirichlet.

(Repertorium der Physik von *H. W. Dove* und *L. Moser*. I, p. 152—174, 1837).

Die merkwürdigen Reihen, welche in einem bestimmten Intervalle Functionen darstellen, welche ganz gesetzlos sind, oder in verschiedenen Theilen dieses Intervalles ganz verschiedenen Gesetzen folgen, haben seit der Begründung der mathematischen Wärmelehre durch *Fourier* so zahlreiche Anwendungen in der analytischen Behandlung physikalischer Probleme[1]) gefunden, dass es zweckmässig erscheint, die für die folgenden Bände dieses Werkes bestimmten Auszüge aus den neuesten Arbeiten über einige Theile der mathematischen Physik durch die Entwicklung einiger der wichtigsten dieser Reihen einzuleiten.

§ 1.

Man denke sich unter a und b zwei feste Werthe und unter x eine veränderliche Grösse, welche nach und nach alle zwischen a und b liegenden Werthe annehmen soll. Entspricht nun jedem x ein einziges endliches y und zwar so, dass, während x das Intervall von a bis b stetig durchläuft, $y = f(x)$ sich ebenfalls ällmählich[2]) verändert, so heisst y eine stetige oder continuirliche*) Function von x für dieses Intervall. Es

*) Da im Folgenden nur von stetigen Functionen die Rede sein wird, so kann der Zusatz ohne Nachtheil wegbleiben.

ist dabei gar nicht nöthig, dass y in diesem ganzen Intervalle nach demselben Gesetze von x abhängig sei, ja man braucht nicht einmal an eine durch mathematische Operationen ausdrückbare Abhängigkeit zu denken. Geometrisch dargestellt, d. h. x und y als Abscisse und Ordinate gedacht, erscheint eine stetige Function als eine zusammenhängende Curve, von der jeder zwischen a und b enthaltenen Abscisse nur ein Punkt entspricht.

[**153**] Diese Definition schreibt den einzelnen Theilen der Curve kein gemeinsames Gesetz vor; man kann sich dieselbe aus den verschiedenartigsten Theilen zusammengesetzt oder ganz gesetzlos gezeichnet denken. Es geht hieraus hervor, dass eine solche Function für ein Intervall als vollständig bestimmt nur dann anzusehen ist, wenn sie entweder für den ganzen Umfang desselben graphisch gegeben ist, oder mathematischen, für die einzelnen Theile desselben geltenden Gesetzen unterworfen wird. So lange man über eine Function nur für einen Theil des Intervalles bestimmt hat, bleibt die Art ihrer Fortsetzung für das übrige Intervall ganz der Willkür überlassen.

Es seien A und B die Endpunkte von a und b, und $\alpha\gamma\beta$ die der Function $f(x)$ entsprechende Curve, so ist klar, dass mit dieser Function auch der Flächenraum $A\alpha\gamma\beta B$ bestimmt ist, welcher von den Ordinaten $A\alpha$, $B\beta$, dem Stück AB der Abscissenaxe und der Curve $\alpha\gamma\beta$ begrenzt wird, wenn er sich gleich nicht immer genau[3]) angeben lässt. Dieser Raum heisst bekanntlich auch das bestimmte Integral der Function $f(x)$ von a bis b genommen und wird durch

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

bezeichnet. Der Ursprung dieses Zeichens liegt in der Art, wie die Infinitesimalrechnung einen Flächenraum oder ein solches Integral betrachtet. Wird die Linie $AB = b - a$ in eine Anzahl n gleicher Theile zerlegt, deren gemeinschaftlicher Werth $= \frac{b-a}{n} = \delta$, und werden durch α und die Endpunkte der den Theilungspunkten 1, 2, 3 ... entsprechenden Ordinaten Parallelen mit der Abscissenaxe gezogen, so entstehen n Rechtecke, deren Summe

$$(1)\quad \delta f(a) + \delta f(a+\delta) + \delta f(a+2\delta) \ldots + \delta f(a+(n-1)\delta),$$

wie sich leicht streng beweisen lässt[4]), und wie es auch schon die blosse Anschauung ergiebt, bei unaufhörlichem Wachsen der Zahl n zuletzt in den Flächenraum $A\alpha\gamma\beta B$ übergeht, d. h. man kann n immer so gross wählen, dass die Summe (1) von diesem Raume um weniger verschieden sein wird, als eine noch so kleine vorher bestimmte Grösse. Nimmt man $b-a$ und also auch δ als positiv an, so erscheinen offenbar die in (1) enthaltenen Rechtecke als positiv oder negativ, je nachdem sie auf der Seite der positiven oder der negativen y liegen. Umgekehrt verhält es sich, wenn $b-a$ negativ ist. Es geht also hieraus hervor, dass ein bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

(wenn man dieses als den Grenzwerth betrachtet, welchen (1) für ein unendliches n annimmt) nur insofern als Flächenraum angesehen werden kann, als man bei letzterem die Theile, welche auf entgegengesetzten Seiten der Abscissenaxe liegen, entgegengesetzt und zwar die auf der Seite der positiven y liegenden als positiv oder negativ nimmt, je nachdem b grösser oder kleiner als a ist.

§ 2.

[**154**] Aus der Definition des bestimmten Integrales als Grenzwerth von (1) oder als Flächenraum mit der eben angegebenen Modification folgen fast unmittelbar mehrere Eigenschaften, die ich hier zusammenstelle, um mich im Folgenden leichter darauf berufen zu können; c bezeichnet wie a und b eine Constante.

$$(2)\quad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx,$$

$$(3)\quad \int_a^b c f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx,$$

$$(4)\quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx,$$

(5) $$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f\left(\frac{x}{c}\right)dx,$$

(6) $$\int_a^b (f(x) \pm F(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b F(x)dx,$$

(7) »Hat $f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$ immer dasselbe Zeichen, so ist $\int_a^b f(x)dx$ positiv oder negativ, je nachdem jenes Zeichen dem von $b - a$ gleich oder entgegengesetzt ist.«

(8) »Das Integral $\int_a^b \varphi(x)F(x)dx$ liegt immer zwischen $M\int_a^b F(x)dx$ und $N\int_a^b F(x)dx$, wenn $F(x)$ innerhalb der Grenzen a und b sein Zeichen nicht ändert und M und N respective den grössten und kleinsten Werth*) bezeichnen, den $\varphi(x)$ in dem genannten Intervalle erhält.«

Dieser Satz, welcher im Folgenden häufig Anwendung findet, ist leicht aus den vorhergehenden abzuleiten. Nach den über M und N gemachten Voraussetzungen bleiben

$$M - \varphi(x), \quad \varphi(x) - N$$

zwischen $x = a$ und $x = b$ stets positiv.

$$[M - \varphi(x)]F(x), \quad [\varphi(x) - N]F(x)$$

sind daher in diesem Intervalle entweder beide immer positiv oder beide immer negativ, woraus vermöge (7) folgt, dass die Integrale

$$\int_a^b [M - \varphi(x)]F(x)dx, \quad \int_a^b [\varphi(x) - N]F(x)dx$$

---

*) Es ist wohl zu bemerken, dass hier bei der Vergleichung zweier Werthe hinsichtlich ihrer Grösse auf die Zeichen Rücksicht genommen wird; r heisst grösser als s, oder geschrieben $r > s$, wenn die algebraische Differenz $r - s$ positiv ist.

[155] gleiche Zeichen haben. Werden diese Integrale nach (6) und (3) in die Form

$$M\int_a^b F(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)F(x)\,dx,\quad \int_a^b \varphi(x)F(x)\,dx - N\int_a^b F(x)\,dx$$

gebracht, so ist die Behauptung bewiesen.

Liegt c zwischen a und b, so ist

(9) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Dieser Satz sagt nichts anderes, als dass der Flächenraum

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

durch die der Abscisse c entsprechende Ordinate in zwei andere Flächenräume zerlegt wird. Man kann durch wiederholte Anwendung desselben jedes Integral in eine beliebige Anzahl anderer Integrale zerlegen.

Es geht z. B. daraus hervor, dass

(10) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2mx\,dx = 0,$$

wenn m irgend eine von Null verschiedene ganze Zahl bezeichnet. Zerlegt man nämlich diesen Flächenraum in $2m$ andere zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{4m}$, $\frac{\pi}{4m}$ und $\frac{2\pi}{4m}$, $\frac{2\pi}{4m}$ und $\frac{3\pi}{4m}$, ... $\frac{(2m-1)\pi}{4m}$ und $\frac{2m\pi}{4m}$, so sieht man leicht, dass der erste dem zweiten, der dritte dem vierten u. s. w. gleich und entgegengesetzt ist.

Endlich ist für das Folgende noch die Kenntniss der Summe z der endlichen Reihe

$$z = \cos\vartheta + \cos 2\vartheta + \cdots + \cos n\vartheta$$

erforderlich. Um zur Bestimmung derselben zu gelangen, multiplicire man die Gleichung mit $2\cos\vartheta$ und verwandle die Cosinusproducte nach der bekannten Formel

$$2 \cos\beta \cdot \cos\gamma = \cos(\beta - \gamma) + \cos(\beta + \gamma)$$

in Summen. Man erhält so:

$$2z \cos\vartheta = 1 + \cos\vartheta + \cos 2\vartheta + \cdots + \cos(n-1)\vartheta$$
$$+ \cos 2\vartheta + \cos 3\vartheta + \cos 4\vartheta + \cdots + \cos(n+1)\vartheta.$$

Die Vergleichung der oberen Horizontalreihe mit der durch z bezeichneten Reihe ergiebt für dieselbe: $z + 1 - \cos n\vartheta$; ebenso findet man für die untere: $z - \cos\vartheta + \cos(n+1)\vartheta$. Werden beide Werthe eingesetzt, so kommt

$$2z \cos\vartheta = 2z + 1 - \cos\vartheta + \cos(n+1)\vartheta - \cos n\vartheta.$$

Bringt man $2z$ auf die andere Seite und dividirt durch $2(\cos\vartheta - 1)$, so folgt

$$z = -\tfrac{1}{2} + \frac{\cos n\vartheta - \cos(n+1)\vartheta}{2(1 - \cos\vartheta)}.$$

Dieser Ausdruck für z wird vereinfacht, wenn man $2\sin^2\frac{\vartheta}{2}$ für $1 - \cos\frac{\vartheta}{2}$ und $2\sin\frac{\vartheta}{2}\sin(n+\frac{1}{2})\vartheta$ für $\cos n\vartheta - \cos(n+1)\vartheta$ einführt, und den gemeinschaftlichen Factor $2\sin\frac{\vartheta}{2}$ weglässt. Man findet so: [**156**]

$$(11) \quad \cos\vartheta + \cos 2\vartheta + \cdots + \cos n\vartheta = -\tfrac{1}{2} + \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\vartheta}{\sin\frac{\vartheta}{2}}.$$

§ 3.

Verschiedene Aufgaben der mathematischen Physik[5]) erfordern die Darstellung einer für das Intervall von 0 bis π ganz willkürlich gegebenen Function $f(x)$ durch eine unendliche Reihe von folgender Form

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \cdots,$$

wo $a_1, a_2, a_3 \ldots$ von x unabhängige Grössen bezeichnen. Der natürlichste Weg zu der verlangten Reihenentwicklung scheint der sogenannte Uebergang vom Endlichen zum Unendlichen zu sein. Man denke sich nämlich zunächst die Reihe aus einer endlichen Anzahl $n-1$ von Gliedern bestehend, d. h. man betrachte den Ausdruck:

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_{n-1} \sin(n-1)x.$$

Die darin enthaltenen willkürlichen $n-1$ Coefficienten $a_1, a_2 \ldots a_{n-1}$ lassen sich so bestimmen, dass dieser Ausdruck für eben so viele besondere Werthe von x, nämlich $\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n} \cdots (n-1)\frac{\pi}{n}$ der gegebenen Function $f(x)$ gleich wird. Lässt man, nachdem die Werthe der Coefficienten gefunden worden sind, n ohne Grenzen wachsen, so geht die endliche Reihe in eine unendliche über, die Werthe $\frac{\pi}{n}$, $\frac{2\pi}{n} \cdots \frac{(n-1)\pi}{n}$ rücken einander immer näher und erfüllen zuletzt das ganze Intervall von 0 bis π, so dass die Gleichheit der Function und der unendlichen Reihe für den ganzen Umfang desselben stattfindet.

Die Gleichsetzung der Function $f(x)$ und der endlichen Reihe für die vorher angeführten besonderen Werthe ergiebt folgende Bedingungen:

$$a_1 \sin\frac{\pi}{n} + a_2 \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + a_m \sin\frac{m\pi}{n} + \cdots + a_{n-1} \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = f\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

$$a_1 \sin\frac{2\pi}{n} + a_2 \sin\frac{4\pi}{n} + \cdots + a_m \sin\frac{2m\pi}{n} + \cdots + a_{n-1} \sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = f\left(\frac{2\pi}{n}\right),$$

$$a_1 \sin\frac{(n-1)\pi}{n} + a_2 \sin(n-1)\frac{2\pi}{n} + \cdots + a_m \sin(n-1)\frac{\pi}{n} + \cdots + a_{n-1} \sin\frac{(n-1)^2\pi}{n} = f\left((n-1)\frac{\pi}{n}\right).$$

Um aus diesen $n-1$ Gleichungen irgend einen darin enthaltenen Coefficienten, z. B. a_m (wo m eine den Zahlen 1, 2, 3 … $n-1$) zu erhalten, multiplicire man diese Gleichungen der Reihe nach mit $2\sin\frac{m\pi}{n}$, [157] $2\sin\frac{2m\pi}{n}$, $2\sin\frac{3m\pi}{n} \cdots$ $2\sin(n-1)\frac{\pi}{m}$ und addire nachher alle zusammen. Die so entstehende neue Gleichung wird a_m allein enthalten und zur

Bestimmung dieser Grösse führen. Um sich hiervon zu überzeugen, betrachte man den Inbegriff aller Glieder, die in dieser Gleichung irgend einen Coefficienten a_h enthalten, wo h wie m eine in der Reihe 1, 2, 3, ... $n-1$ enthaltene Zahl bezeichnet. Setzt man a_h als gemeinschaftlichen Factor heraus, so erhält man als Vereinigung aller dieser Glieder

$$a_h\left(2\sin\frac{m\pi}{n}\sin\frac{h\pi}{n}+2\sin\frac{2m\pi}{n}\sin\frac{2h\pi}{n}+\cdots\right.$$
$$\left.+2\sin\frac{(n-1)m\pi}{n}\sin\frac{(n-1)h\pi}{n}\right)$$

und man beweist leicht, dass der Ausdruck zwischen den Klammern der Null gleich ist, wenn h von m verschieden ist. Schreibt man nämlich statt der Sinusproducte Cosinusdifferenzen, so geht derselbe in folgende Differenz über:

$$(12)\quad\left\{\begin{aligned}&\cos(m-h)\frac{\pi}{n}+\cos 2(m-h)\frac{\pi}{n}+\cdots\\&\qquad+\cos(n-1)(m-h)\frac{\pi}{n}\\&-\left(\cos(m+h)\frac{\pi}{n}+\cos 2(m+h)\frac{\pi}{n}+\cdots\right.\\&\qquad\left.+\cos(n-1)(m+h)\frac{\pi}{n}\right).\end{aligned}\right.$$

Jede dieser Reihen lässt sich nach Formel (11) summiren. Wenn man dort $\vartheta=\frac{(m-h)\pi}{n}$ setzt und n in $n-1$ verwandelt, so findet man für die erste

$$-\tfrac{1}{2}+\frac{\sin(n-\frac{1}{2})(m-h)\frac{\pi}{n}}{2\sin(m-h)\frac{2\pi}{n}},$$

Erinnert man sich, dass für irgend eine ganze Zahl l

$$\sin(l\pi-\gamma)=\mp\sin\gamma,$$

wo das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem l gerade oder ungerade ist, so sieht man gleich, dass

$$\sin\left(n-\tfrac{1}{2}\right)(m-h)\frac{\pi}{n} = \sin\left((m-h)\pi - (m-h)\frac{\pi}{2n}\right)$$
$$= \mp \sin(m-h)\frac{\pi}{2n},$$

und dass also die erste der Reihen (12) den Werth -1 oder 0 hat, je nachdem $(m-h)$ gerade oder ungerade ist. Aehnlicherweise ergiebt sich für die zweite Reihe (12) der Werth $+1$ oder 0, je nachdem $m+h$ gerade oder ungerade ist. Bemerkt man nun, dass $m-h$ und $m+h$ entweder zugleich gerade oder zugleich ungerade sind, da ihre Summe $2m$ gerade ist, so sieht man auf der Stelle, dass der Ausdruck (12) verschwindet, wie es früher behauptet wurde.

Es ist nicht zu übersehen, dass das oben gefundene Resultat wesentlich voraussetzt, dass h von m verschieden ist. Für den Fall, wo $h = m$, erscheint der Ausdruck für die Summe der ersten der Reihen (12) in der Form $\frac{0}{0}$, und die vorige Bestimmung verliert ihre Gültigkeit. Man erhält aber in diesem Falle, da alle diese Glieder der Einheit gleich [**158**] werden, sogleich für ihre Summe $n-1$, während die zweite den Werth 1 annimmt, in dem $m+h = 2m$ in diesem Falle gerade ist. Der Ausdruck (12) verschwindet also für jedes h, welches von m verschieden ist, für $h = m$ hingegen erhält er den Werth n. Es geht daraus hervor, dass die Gleichung, deren Entstehung man oben näher angegeben hat, in der That nur den einzigen Coefficienten a_m enthält und von folgender sehr einfacher Form ist:

$$na_m = 2\sin\frac{m\pi}{n} f\left(\frac{\pi}{n}\right) + 2\sin\frac{2m\pi}{n} f\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cdots$$
$$+ 2\sin(n-1)\frac{m\pi}{n} f\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right),$$

und folglich

$$a_m = \frac{2}{n}\left[\sin\frac{m\pi}{n} f\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\frac{2m\pi}{n} f\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cdots\right.$$
$$\left. + \sin\frac{(n-1)m\pi}{n} f\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right].$$

Nachdem die Coefficienten der endlichen Reihe gefunden worden sind, bleibt zu untersuchen, wie sich der Coefficient,

welcher eine beliebige, aber bestimmte Stelle einnimmt, bei unaufhörlich wachsender Gliederzahl verändert, d. h. es bleibt der Werth auszumitteln, den der vorhergehende Ausdruck für a_m annimmt, wenn man n unendlich gross werden lässt, während m constant gedacht wird. Schreibt man den Ausdruck wie folgt:

$$a_m = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{n}\sin\frac{0\,m\pi}{n}f\left(\frac{0\,\pi}{n}\right) + \frac{\pi}{n}\sin\frac{m\pi}{n}f\left(\frac{\pi}{n}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{\pi}{n}\sin\frac{2\,m\pi}{n}f\left(\frac{2\,\pi}{n}\right) + \cdots + \frac{\pi}{n}\sin\left((n-1)\frac{m\pi}{n}\right)f\left(\frac{(n-1)\,\pi}{n}\right)\right],$$

so erhellt aus der Vergleichung der Summe zwischen den Klammern, mit der Gleichung (1), dass für $n = \infty$ die Summe in das bestimmte Integral

$$\int_0^\pi \sin mx\, f(x)\, dx$$

übergeht.

Die alsdann zu einer unendlichen gewordene Reihe stellt aber, wie früher bemerkt worden, die Function $f(x)$ für alle zwischen 0 und π gelegenen Werthe von x dar, und wir haben also für den ganzen Umfang des genannten Intervalles

$$(13) \quad f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2\,x + \cdots + a_m \sin mx + \cdots$$

in welcher Reihe die Coefficienten nach der allgemeinen Gleichung

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x) \sin mx\, dx$$

zu bestimmen sind.

Man kann durch ähnliche Betrachtungen zu einer Reihe gelangen, welche nur die Cosinus von x und dessen Vielfachen enthält, und die Function $f(x)$, wie die gefundene Sinusreihe, für dasselbe Intervall von 0 bis π darstellt. Kürzer erreicht man jedoch diesen Zweck, wenn man das schon gefundene Resultat (13) benutzt. Setzt man in demselben statt $f(x)$ das Product $2\,f(x) \sin x$, so erhält man

$$2 \sin x f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2\,x + \cdots + a_m \sin mx + \cdots$$

wo

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 2 \sin mx \sin x f(x) dx.$$

Dieser Werth a_m lässt sich auch so schreiben:

[159] $$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos\left((m-1)x\right) f(x)\, dx - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos\left((m+1)x\right) f(x)\, dx,$$

oder wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos hx f(x)\, dx = b_h,$$

wo h eine ganze positive Zahl mit Einschluss der Null bezeichnet: $a_m = b_{m-1} - b_{m+1}$.

Nimmt man successive $m = 1, 2, 3 \ldots$ und substituirt in obige Reihe, so kommt

$$2 \sin x f(x) = (b_0 - b_2) \sin x + (b_1 - b_3) \sin 2x + (b_2 - b_4) \sin 3x + \cdots,$$

oder wenn man nach $b_0, b_1, b_2 \ldots$ ordnet

$$2 \sin x f(x) = b_0 \sin x + b_1 \sin 2x + b_2 (\sin 3x - \sin x) + b_3 (\sin 4x - \sin 2x) + \text{u. s. w.}$$

Durch Einführung der Producte $2 \sin x \cdot \cos x$, $2 \sin x \cdot \cos 2x$ ... an die Stelle von $\sin 2x$, $\sin 3x - \sin x$ ... wird die ganze Gleichung durch $2 \sin x$ theilbar und man erhält nach Entfernung dieses gemeinschaftlichen Factors

(14) $$f(x) = \tfrac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \cdots + b_m \cos mx \ldots$$

Diese Gleichung gilt wie die Gleichung (13), aus der sie abgeleitet ist, für alle Werthe zwischen 0 und π, und der allgemeine Coefficient ist

$$b_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos mx f(x) dx.$$

Obgleich die Gleichungen (13) und (14) beide eine ganz beliebige Function $f(x)$ für das Intervall von 0 bis π darstellen, so sind sie doch wesentlich von einander verschieden. Während die letztere wegen der bekannten Eigenschaft des Cosinus, für entgegengesetzte Werthe des Bogens gleich zu sein, durch die Verwandlung von x in $-x$ unverändert bleibt, nimmt die erstere in demselben Falle den entgegengesetzten Werth an, wie ebenso leicht aus der Natur des Sinus erhellt. Man sieht hieraus leicht, dass man unter gewissen Umständen eine Function von x für das Intervall von $-\pi$ bis π durch die Reihe (14) oder (13) darstellen kann. Denkt man sich nämlich unter $f(x)$ eine von $x=0$ bis $x=\pi$ ganz beliebig gegebene Function von x, und setzt diese Function oder Curve von $x=0$ bis $x=-\pi$ so fort, dass immer $f(-x)=f(x)$, so wird diese Function von $x=\pi$ bis $x=-\pi$ durch die Reihe (14) ausgedrückt werden können, denn diese Reihe gilt immer von 0 bis π, und da sie bei der Verwandlung von x in $-x$ unverändert bleibt, welches nach der angegebenen Art der Fortsetzung auch bei der Function der Fall ist, so stellt sie diese auch von 0 bis $-\pi$ dar. Ganz auf dieselbe Weise überzeugt man sich, dass, wenn man eine von 0 bis π beliebig gegebene Function so fortsetzt, dass $f(-x)=-f(x)$, für eine solche Function zwischen $x=-\pi$ und $x=\pi$ die Reihe (13) gilt. Auf diese einfache Bemerkung kann man eine Reihe gründen, welche die Reihen (13) und (14) als besondere Fälle in sich begreift und eine von $x=-\pi$ bis $x=\pi$ ganz willkürlich gegebene Function $\varphi(x)$ darzustellen geeignet ist.

Bringt man nämlich $\varphi(x)$ in die Form

$$\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{2}+\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{2},$$

[**160**] so hat der erste Theil $\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{2}$ die Eigenschaft, durch Verwandlung von x in $-x$ unverändert zu bleiben, und ist also nach dem Vorhergehenden von $x=-\pi$ bis $x=\pi$ durch (14) ausdrückbar. Ebenso lässt sich offenbar der

zweite Theil $\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{2}$ durch die Reihe (13) darstellen und man hat also für den ganzen Umfang des Intervalles von $-\pi$ bis $+\pi$, wenn man beide Theile vereinigt:

$$\begin{aligned}(15)\quad \varphi(x) = \tfrac{1}{2}b_0 + b_1\cos x + b_2\cos 2x + \cdots + b_m\cos mx + \cdots \\ + a_1\sin x + a_2\sin 2x + \cdots + a_m\sin mx + \cdots\end{aligned}$$

wo die Coefficienten durch die Gleichungen

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos mx(\varphi(x)+\varphi(-x))\,dx,$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin mx(\varphi(x)-\varphi(-x))\,dx$$

zu bestimmen sind. Man kann diesen Ausdrücken eine einfachere Form geben. Es ist nämlich:

$$\int_0^\pi \cos mx(\varphi(x)+\varphi(-x))\,dx$$

$$= \int_0^\pi \cos mx\,\varphi(x)\,dx + \int_0^\pi \cos mx\,\varphi(-x)\,dx,$$

und nach (5):

$$\int_0^\pi \cos mx\,\varphi(-x)\,dx = -\int_0^{-\pi} \cos mx\,\varphi(x)\,dx,$$

oder nach (2):

$$\int_{-\pi}^0 \cos mx\,\varphi(x)\,dx,$$

folglich

$$b_m = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^0 \cos mx\,\varphi(x)\,dx + \int_0^\pi \cos mx\,\varphi(x)\,dx\right),$$

oder nach (9):

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx\,\varphi(x)\,dx.$$

Ebenso ergiebt sich

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx\, \varphi(x)\, dx.^{6)}$$

§ 4.

Wie natürlich und befriedigend auch auf den ersten Blick der Gang erscheinen mag, welcher uns zu den Reihen des vorigen Paragraphen geführt hat, so findet man doch bald bei genauerer Erwägung, dass derselbe als strenger Beweis für die Gültigkeit dieser Reihen etwas zu wünschen übrig lässt. Es geht aus dem Begriff des bestimmten Integrals, wie dieses in (1) festgestellt wurde, unbestreitbar hervor, dass irgend ein Coefficient a_m, welcher in der endlichen Reihe eine bestimmte Stelle m einnimmt, bei unaufhörlichem Wachsen von n in das Integral

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin mx\, f(x)\, dx$$

übergeht, allein man darf nicht vergessen, dass durch das Zunehmen von n zugleich immer mehr neue Glieder hinzukommen. Um die Richtigkeit der Reihe (13) zu beweisen, müsste man sich die Glieder der endlichen Reihe in zwei Gruppen zerfällt denken; die erste würde alle Glieder bis zu einer bestimmten unveränderlich gedachten Stellenzahl m die zweite alle [**161**] übrigen enthalten. Könnte man nun zeigen, dass, während die Coefficienten der Glieder der ersten Gruppe sich ins Unendliche den durch bestimmte Integrale ausgedrückten Werthen nähern, der Inbegriff aller Glieder der zweiten, deren Anzahl mit n unaufhörlich wächst, nie eine gewisse von m abhängige und zwar beliebig klein ausfallende Grenze überschreitet, wenn man das m gehörig gross wählte, so würde man die Gewissheit erlangen, dass die Reihe (13) convergirend ist und die Function $f(x)$ für das Intervall von 0 bis π wirklich darstellt.

Die Nothwendigkeit der eben angedeuteten Nachweisung, wenn man den Uebergang vom Endlichen zum Unendlichen zu einem ganz strengen Verfahren erheben will, wird im höchsten Grade einleuchtend, wenn man der endlichen Reihe,

von der man ausgeht, eine andere Form giebt. Betrachtet man eine Reihe von der Form:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1},$$

so lassen sich die Coefficienten ebenfalls leicht so bestimmen, dass die Reihe für n Werthe von x innerhalb eines beliebigen Intervalles einer ganz willkürlichen Function $f(x)$ gleich wird. Lässt man nach erlangter Bestimmung irgend eines Coefficienten n unendlich wachsen, während die Stellenzahl m des Coefficienten constant bleibt, so nähert sich der Coefficient unaufhörlich einem gewissen Endwerth, und man würde also durch das im vorigen Paragraphen befolgte Verfahren zu der falschen Folgerung verleitet, eine ganz gesetzlose oder stellenweise ganz anderen Gesetzen gehorchende Function lasse sich durch eine nach Potenzen der Veränderlichen x geordnete Reihe darstellen.

Die Betrachtungen, die dem Verfahren, welches uns die Reihe (13) geliefert hat, die gehörige Strenge geben würden, sind so zusammengesetzter Art, dass wir lieber einen ganz anderen Weg der Beweisführung einschlagen. Wir werden die Reihe (15), welche die beiden anderen (13) und (14) als besondere Fälle in sich begreift, an und für sich untersuchen, und ohne etwas von dem Früheren vorauszusetzen, direct nachweisen, dass die Reihe:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2} b_0 &+ b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \cdots + b_m \cos mx + \cdots \\ &+ a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_m \sin mx + \cdots,\end{aligned}$$

wenn man ihre Coefficienten durch die Gleichungen

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx\, \varphi(x)\, dx, \quad a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx\, \varphi(x)\, dx$$

bestimmt, immer convergirt und für alle zwischen $-\pi$ und π enthaltenen Werthe von x der Function $\varphi(x)$ gleich ist.

Schreibt man in den vorhergehenden Integralen statt x einen anderen Buchstaben α, was offenbar erlaubt ist, da ein bestimmtes Integral nur von der Natur der Function und den Werthen der Grenzen abhängig ist, und setzt die Werthe für die $2n + 1$ ersten Coefficienten ein, so erhält man als Summe der $2n + 1$ ersten Glieder:

[162]
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha\, \varphi(\alpha)$$

$$+\frac{1}{\pi}\cos x\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha \cos\alpha\, \varphi(\alpha)+\cdots+\frac{1}{\pi}\cos nx\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha \cos n\alpha\, \varphi(\alpha),$$

$$+\frac{1}{\pi}\sin x\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha \sin\alpha\, \varphi(\alpha)+\cdots+\frac{1}{\pi}\sin nx\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha \sin n\alpha\, \varphi(\alpha),$$

oder nach (3) und (6)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha\, \varphi(\alpha)\,[\tfrac{1}{2}+\cos(\alpha-x)+\cos 2(\alpha-x)+\cdots+\cos n(\alpha-x)],$$

oder endlich, wenn man die Cosinusreihe vermittelst der Formel (11) summirt,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha\, \varphi(\alpha)\,\frac{\sin\left[(2n+1)\left(\frac{\alpha-x}{2}\right)\right]}{\sin\frac{\alpha-x}{2}}.$$

Soll also die Reihe convergiren und den Werth $\varphi(x)$ haben, so muss der Unterschied zwischen $\varphi(x)$ und diesem Integral, welches die Summe ihrer $2n+1$ ersten Glieder ausdrückt, bei unaufhörlichem Zunehmen von n zuletzt kleiner werden als jede noch so klein gedachte Grösse. Es ist nöthig, der Untersuchung dieses Integrals in seiner ganzen Allgemeinheit die Behandlung einiger einfachen Fälle vorauszuschicken, auf welche sich alle übrigen zurückführen lassen.

§ 5.

Man betrachte zunächst das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\, d\beta,$$

in welchem n wie vorher eine positive ganze Zahl bezeichnet.

Setzt man statt $\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}$ den nach (11) äquivalenten Ausdruck

$$1 + 2\cos 2\beta + 2\cos 4\beta \cdots + 2\cos 2n\beta,$$

so erhellt nach (10), dass alle Glieder mit Ausnahme des ersten zwischen den angegebenen Grenzen integrirt verschwinden, und man findet:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta} d\beta = \frac{\pi}{2}.$$

Setzt man zur Abkürzung $2n+1=k$, und zerlegt das Integral in $(n+1)$ andere zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{k}$, $\frac{\pi}{k}$ und $\frac{2\pi}{k}$, $\cdots$ $\frac{n\pi}{k}$ und $\frac{\pi}{2}$, so folgt nach (7), dass von diesen Integralen das erste positiv, das zweite negativ, das dritte positiv u. s. w. sein wird, da $\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}$ innerhalb der Grenzen [163] des ersten positiv, des zweiten negativ u. s. w. ist. Bezeichnet man das Integral des ν-ten Ranges, d. h. das von $\frac{(\nu-1)\pi}{k}$ bis $\frac{\nu\pi}{k}$ genommene, abgesehen vom Vorzeichen mit ϱ_ν, so dass also

$$\varrho_\nu = \mp \int_{\frac{(\nu-1)\pi}{k}}^{\frac{\nu\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin\beta} d\beta,$$

wo das untere oder obere Zeichen gilt, je nachdem ν gerade oder ungerade ist, so folgt leicht aus (8), da $\mp \sin k\beta$ von $\frac{(\nu-1)\pi}{k}$ bis $\frac{\nu\pi}{k}$ stets positiv bleibt, dass ϱ_ν zwischen den beiden Producten liegt, welche man erhält, wenn man

$$\int_{\frac{(\nu-1)\pi}{k}}^{\frac{\nu\pi}{k}} \mp \sin k\beta \, d\beta = \frac{2}{k}$$

mit dem grössten und kleinsten Werth multiplicirt, den der Factor $\frac{1}{\sin\beta}$ in dem genannten Intervalle annimmt.

Das vorhergehende Integral ist nach (4)

$$\int_0^{\frac{\pi}{k}} \mp \sin((\nu-1)\pi + k\beta)\,d\beta = \int_0^{\frac{\pi}{k}} \sin k\beta\,d\beta,$$

oder nach (5)

$$= \frac{1}{k}\int_0^{\pi} \sin\beta\,d\beta = \frac{2}{k}.\,^{7)}$$

Was den Factor $\frac{1}{\sin\beta}$ betrifft, so ist dieser um so kleiner, als β grösser ist. Sein grösster Werth ist daher $\frac{1}{\sin\left(\frac{(\nu-1)\pi}{k}\right)}$ und der kleinste $\frac{1}{\sin\frac{\nu\pi}{k}}$, so dass also

$$\varrho_\nu > \frac{2}{k}\,\frac{1}{\sin\frac{\nu\pi}{k}} \quad \text{und} \quad \varrho_\nu < \frac{2}{k}\,\frac{1}{\sin\frac{(\nu-1)\pi}{k}}.$$

Für das letzte Integral ϱ_{n+1} gelten die Grenzen $\frac{2}{k}$ und $\frac{2}{k}\,\frac{1}{\sin\frac{n\pi}{k}}$, die sich auf dieselbe Weise ergeben. Vergleicht man die Grenzen, zwischen [**164**] welchen je zwei aufeinander folgende Integrale liegen, so ergiebt sich auf der Stelle, dass $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \ldots \varrho_{n+1}$ eine abnehmende Reihe bilden, d. h. $\varrho_1 > \varrho_2 > \varrho_3 \ldots > \varrho_{n+1}$. Das ursprüngliche, später in $n+1$ andere Integrale zerlegte Integral hatte den Werth $\frac{\pi}{2}$. Es findet also die Gleichung statt

$$\frac{\pi}{2} = \varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho_4 + \cdots \pm \varrho_{n+1}.$$

Aus der Abnahme der Glieder ϱ_1, ϱ_2 ... folgt leicht, wenn man die Reihe bei ihrem $2m$-ten und $(2m+1)$-ten Gliede abbricht (wo natürlich $2m < n$):

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} > \varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3 - \cdots - \varrho_{2m}, \\[2ex] \dfrac{\pi}{2} < \varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3 - \cdots - \varrho_{2m} + \varrho_{2m+1}. \end{cases}$$

Um sich zu überzeugen, dass diese Ungleichheiten stattfinden, darf man nur bemerken, dass im ersten Falle die weggebrachten Glieder, wenn man sie paarweise vereinigt, $\varrho_{2m+1} - \varrho_{2m+2}$, $\varrho_{2m+3} - \varrho_{2m+4}$ ..., positive Differenzen geben, und dass man also etwas positives weglässt, und das Umgekehrte für den zweiten gilt.

Wir wenden uns jetzt zu der Betrachtung des Integrales:

$$\int_0^h \frac{\sin k\beta}{\sin\beta} f(\beta)\, d\beta = S,$$

wo h eine positive, $\frac{\pi}{2}$ nicht übersteigende Constante und $f(\beta)$ eine stetige Function von β bezeichnet, welche, während β von 0 bis h wächst, immer positiv bleibt und nie zunimmt. Ich sage absichtlich: nie zunimmt, um den Fall nicht auszuschliessen, wo $f(\beta)$ stellenweise oder für das ganze Intervall constant bliebe. Der Buchstabe k ist wie früher zur Abkürzung für $2n+1$ eingeführt, und wir wollen untersuchen, wie sich S verändert, wenn n ohne Grenze wächst. Es sei $r\frac{\pi}{k}$ das grösste in h enthaltene Vielfache von $\frac{\pi}{k}$, wo offenbar die ganze Zahl r nicht grösser als n sein kann, und man zerlege das Integral in $r+1$ andere, zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{k}$, $\frac{\pi}{k}$ und $\frac{2\pi}{k}$, ... $\frac{r\pi}{k}$ und h, so sind diese Integrale wieder abwechselnd positiv und negativ. Bezeichnet man dasjenige, welches die ν-te Stelle einnimmt, abgesehen von seinem Zeichen, mit R_ν, so dass also

$$R_\nu = \mp \int_{\frac{(\nu-1)\pi}{k}}^{\frac{\nu\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin\beta} f(\beta)\, d\beta,$$

[**165**] wo wieder das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem ν gerade oder ungerade ist, so hat man

$$S = R_1 - R_2 + R_3 - \cdots \pm R_{\nu+1}.$$

Die positiven Werthe R_1, R_2, $R_3 \ldots$ bilden eine abnehmende Reihe, wie man sich leicht überzeugt, wenn man auf R_ν den Satz (8) anwendet. Man findet unter Berücksichtigung der über $f(\beta)$ gemachten Voraussetzung, dass

$$R_\nu = \int_{\frac{(\nu-1)\pi}{k}}^{\frac{\nu\pi}{k}} \mp \frac{\sin k\beta}{\sin\beta} f(\beta)\, d\beta$$

zwischen den beiden Producten

$$f\left(\frac{\nu\pi}{k}\right) \int_{\frac{(\nu-1)\pi}{k}}^{\frac{\nu\pi}{k}} \mp \frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\, d\beta \quad \text{und} \quad f\left(\frac{(\nu-1)\pi}{k}\right) \int_{\frac{(\nu-1)\pi}{k}}^{\frac{\nu\pi}{k}} \mp \frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\, d\beta$$

liegt, d. h. also

$$R_\nu > f\left(\frac{\nu\pi}{k}\right) \varrho_\nu, \quad R_\nu < f\left(\frac{(\nu-1)\pi}{k}\right) \varrho_\nu.\text{*)}$$

Vergleicht man die untere Grenze $f\left(\frac{\nu\pi}{k}\right)\varrho_\nu$ für R_ν mit den oberen für $R_{\nu+1}$, welche $f\left(\frac{\nu\pi}{k}\right)\varrho_{\nu+1}$ ist, so folgt wegen $\varrho_\nu > \varrho_{\nu+1}$, dass auch $R_\nu > R_{\nu+1}$, wie vorher behauptet wurde. Bricht man die Reihe S bei R_{2m} und R_{2m+1} ab (wo $2m < r$), so ergeben sich die Ungleichheiten

---

*) Wäre $f\left(\frac{\nu\pi}{k}\right) = f\left(\frac{(\nu-1)\pi}{k}\right)$, so würden die beiden Grenzen zusammenfallen und man muss, um alle Fälle zu umfassen, mit dem Zeichen $t > w$ den Sinn verbinden, dass t nicht kleiner als w ist.

$$S > R_1 - R_2 + R_3 - \cdots - R_{2m}$$
$$S < R_1 - R_2 + R_3 - \cdots - R_{2m} + R_{2m+1}.$$

Die erste dieser Ungleichheiten wird nicht aufhören richtig zu bleiben, wenn man statt der zu addirenden Glieder R_1, R_3 ... ihre unteren Grenzen $f\left(\frac{\pi}{k}\right)\varrho_1$, $f\left(\frac{3\pi}{k}\right)\varrho_3$ ... und statt der zu subtrahirenden R_2, R_4 ihre oberen Grenzen $f\left(\frac{\pi}{k}\right)\varrho_2$, $f\left(\frac{3\pi}{k}\right)\varrho_4$, ... setzt. Hierdurch und durch Anwendung des umgekehrten Verfahrens auf die untere Ungleichheit erhält man

$$S > f\left(\frac{\pi}{k}\right)(\varrho_1 - \varrho_2) + f\left(\frac{3\pi}{k}\right)(\varrho_3 - \varrho_4) + \cdots$$
$$+ f\left(\frac{(2m-1)\pi}{k}\right)(\varrho_{2m-1} - \varrho_{2m}),$$

$$S < f(0)\varrho_1 - f\left(\frac{2\pi}{k}\right)(\varrho_2 - \varrho_3) - f\left(\frac{4\pi}{k}\right)(\varrho_4 - \varrho_5) - \cdots$$
$$- f\left(\frac{2m\pi}{k}\right)(\varrho_{2m} - \varrho_{2m+1}).$$

[166] Da die Differenzen $\varrho_1 - \varrho_2$, $\varrho_2 - \varrho_3$, $\varrho_3 - \varrho_4$ ... positiv sind und die Function $f(\beta)$ zunimmt, so darf man offenbar in der ersten Ungleichheit $f\left(\frac{\pi}{k}\right)$, $f\left(\frac{3\pi}{k}\right)$ ... und in der zweiten $f\left(\frac{2\pi}{k}\right)$, $f\left(\frac{4\pi}{k}\right)$ ... mit $f\left(\frac{2m\pi}{k}\right)$ vertauschen. Es ist also

$$S > (\varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3 - \cdots - \varrho_{2m}) f\left(\frac{2m\pi}{k}\right),$$
$$S < \varrho_1 f(0) - (\varrho_2 - \varrho_3 + \varrho_4 - \cdots - \varrho_{2m+1}) f\left(\frac{2m\pi}{k}\right).$$

Die Zahl $2m$ ist kleiner als r, und also um so mehr kleiner als n, so dass die Resultate (16) stattfinden.

Die dort gefundenen Ungleichheiten lassen sich in die Form bringen:

$$\varrho_2 - \varrho_3 + \cdots + \varrho_{2m} < \varrho_1 - \frac{\pi}{2},$$
$$\varrho_1 - \varrho_2 + \cdots - \varrho_{2m} > \frac{\pi}{2} - \varrho_{2m+1}.$$

Vergleicht man diese, nachdem man von beiden Seiten der ersten ϱ_{2m+1} abgezogen hat, mit den vorher erhaltenen Grenzen für S, so ergeben sich folgende höchst einfache Resultate:

$$S > \frac{\pi}{2} f\left(\frac{2m\pi}{k}\right) - \varrho_{2m+1} f\left(\frac{2m\pi}{k}\right)$$

$$S < \frac{\pi}{2} f\left(\frac{2m\pi}{k}\right) + \varrho_{2m+1} f\left(\frac{2m\pi}{k}\right) + \varrho_1 \left[f(0) - f\left(\frac{2m\pi}{k}\right)\right].$$

Unser Zweck war, die allmähliche Veränderung des Integrales:

$$S = \int_0^h \frac{\sin k\beta}{\sin\beta} f(\beta)\, d\beta$$

zu untersuchen, wenn man in demselben $k = 2n + 1$ nimmt und die ganze Zahl n über jede Grenze hinaus wachsen lässt. Diese Frage wird auf der Stelle durch die eben gefundenen Ausdrücke beantwortet. Nach dem Früheren ist die darin enthaltene gerade Zahl $2m$ für ein bestimmtes n insofern noch willkürlich, als sie jeden r nicht übersteigenden Werth hat, wo r wie früher das grösste in $\frac{h}{\pi} k = \frac{h}{\pi}(2n + 1)$ enthaltene Ganze bezeichnet. Da hiernach r offenbar gleichzeitig mit n über jede Grenze hinaus wächst, so darf auch $2m$ jede Grenze überschreiten.

Denkt man sich nun das gleichzeitige Wachsen von $2m$ und n so, dass dabei $\frac{2m}{k}$ successive jeden Grad von Kleinheit erreicht, so werden die für S gefundenen Grenzen zuletzt zusammenfallen. Betrachtet man zunächst die untere Grenze

$$\frac{\pi}{2} f\left(\frac{2m\pi}{k}\right) - \varrho_{2m+1} f\left(\frac{2m\pi}{k}\right),$$

so wird unter der angegebenen Voraussetzung ihr erstes Glied zuletzt in $\frac{\pi}{2} f(0)$ übergehn; was das zweite betrifft, so liegt der Factor ϱ_{2m+1} nach [167] Obigem zwischen

$$\frac{2}{k}\,\frac{1}{\sin\frac{2m\pi}{k}} \quad \text{und} \quad \frac{2}{k}\,\frac{1}{\sin\frac{(2m+1)\pi}{k}}.$$

Schreibt man diese in folgender Form:

$$\frac{2}{2m\pi}\cdot\frac{\frac{2m\pi}{k}}{\sin\frac{2m\pi}{k}} \quad \text{und} \quad \frac{2}{(2m+1)\pi}\cdot\frac{(2m+1)\frac{\pi}{k}}{\sin(2m+1)\frac{\pi}{k}},$$

so ist leicht zu sehen, dass beide zuletzt verschwinden. Durch das unaufhörliche Wachsen von m nähert sich $\frac{2}{2m\pi}$ der Null, während

$$\frac{\frac{2m\pi}{k}}{\sin\frac{2m\pi}{k}}$$

wegen des Abnehmens von $\frac{2m\pi}{k}$ sich der Einheit nähert. Das Product wird also Null, und dasselbe gilt von dem zweiten. Es geht hieraus hervor, dass die untere Grenze für S zuletzt mit $\frac{\pi}{2}f(0)$ zusammenfällt. Die beiden ersten Glieder in der oberen Grenze sind den schon untersuchten ganz ähnlich, und es bleibt nur noch das dritte $\varrho_1\left[f(0)-f\left(\frac{2m\pi}{k}\right)\right]$ zu betrachten. Der zweite Factor nähert sich offenbar der Null, und dieses Glied wird also verschwinden, wenn der erste nicht über jede Grenze hinaus wächst. Dass dieses aber nicht der Fall ist, folgt sogleich aus den beiden Ungleichheiten, von denen die erste aus (16) hervorgeht, wenn man dort $m=1$ setzt:

$$\varrho_1 < \frac{\pi}{2}+\varrho_2,\quad \varrho_2 < \frac{2}{k}\,\frac{1}{\sin\frac{\pi}{k}}.$$

Beide mit einander verglichen ergeben:

$$\varrho_1 < \frac{\pi}{2}+\frac{2}{k}\,\frac{1}{\sin\frac{\pi}{k}}$$

und der Werth von

$$\frac{2}{k}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{k}} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\frac{\pi}{k}}{\sin\frac{\pi}{k}}$$

nähert sich durch das Wachsen von k dem Werthe $\frac{2}{\pi}$.

Es ist somit streng bewiesen, dass die beiden Grenzen, zwischen denen S eingeschlossen ist, bei unaufhörlichem Wachsen von n zuletzt mit $\frac{\pi}{2}f(0)$ zusammenfallen, welcher Werth also auch der des Integrales

$$\int_0^h \frac{\sin k\beta}{\sin\beta} f(\beta)\,d\beta$$

für ein unendlich grosses n ist.

Wir haben bisher vorausgesetzt, dass die Function $f(\beta)$, während β von 0 bis h wächst, nie zunimmt und ausserdem stets positiv bleibt. Behält man die erste Bedingung bei, d. h. setzt man voraus, dass für irgend zwei [168] zwischen 0 und h fallende Werthe p und q die Differenz $f(p)-f(q)$ immer negativ oder Null ist, wenn $p-q$ positiv ist, ohne damit die zweite Annahme zu verbinden, dass $f(\beta)$ nicht negativ wird, so findet der vorige Satz ebenfalls noch statt. Nimmt man nämlich eine positive Constante c, welche so gross ist, dass $f(\beta)+c$ nicht negativ wird, so ist der Satz auf $f(\beta)+c$ anwendbar, d. h. das Integral

$$\int_0^h (f(\beta)+c)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta$$

wird für ein unendlich grosses n, $\frac{\pi}{2}[f(0)+c]$. Zugleich ist klar, dass dieses Integral die Summe von folgenden ist:

$$\int_0^h f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta,\quad \int_0^h c\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta,$$

von denen das zweite in demselben Falle $c\frac{\pi}{2}$ wird. (Es ist nämlich bei der vorigen Behandlung der Fall mit eingeschlossen

worden, wo die positive Function im ganzen Intervall constant war.) Also muss das erste durch unaufhörliches Wachsen von n zuletzt den Werth $\frac{\pi}{2} f(0)$ annehmen.

Denkt man sich jetzt eine Function $f(\beta)$, die, während β von 0 bis h wächst, nie abnimmt, so wird $f(\beta)$ nie zunehmen. Man hat also, wenn n unendlich wächst,

$$\int_0^h - f(\beta) \frac{\sin k\beta}{\sin \beta} d\beta = -f(0) \frac{\pi}{2}$$

und folglich

$$\int_0^h f(\beta) \frac{\sin k\beta}{\sin \beta} d\beta = \frac{\pi}{2} f(0).$$

Die vorhergehenden Resultate lassen sich in folgenden Satz zusammenfassen:

(17) »Ist $f(\beta)$ eine stetige Function von β, die, während β von 0 bis h wächst (wo die Constante $h > 0$ und $\overline{\overline{<}} \frac{\pi}{2}$) und nie vom Abnehmen ins Zunehmen oder umgekehrt übergeht[8]), so wird das Integral

$$\int_0^h \frac{\sin (2n+1)\beta}{\sin \beta} f(\beta) d\beta,$$

wenn man darin der ganzen Zahl n immer grössere positive Werthe beilegt, zuletzt immerfort weniger als jede angebbare Grösse von $\frac{\pi}{2} f(0)$ verschieden sein.«

[**169**] Die Constante h bleibe den vorigen Bestimmungen unterworfen, und man denke sich unter g eine zweite Constante, welche kleiner als h und zugleich positiv und von Null verschieden sei. Ist $f(\beta)$ eine für das Intervall von g bis h gegebene stetige Function von β, die, wenn β von g bis h wächst, nie vom Abnehmen ins Zunehmen oder umgekehrt übergeht, so lässt sich nach dem vorigen Satz leicht ermitteln, was aus dem Integral

$$\int_g^h \frac{\sin(2n+1\beta)}{\sin\beta} f(\beta)\,d\beta$$

wird, wenn man n unendlich werden lässt. Da nämlich $f(\beta)$ bloss von $\beta = g$ bis $\beta = h$ gegeben ist, so bleibt die Art der Fortsetzung dieser Function über das genannte Intervall hinaus willkürlich. Denkt man sich $f(\beta)$ für alle Werthe von β zwischen 0 und g inclusive constant und zwar $= f(g)$, so hat man eine von $\beta = 0$ bis $\beta = h$ stetige Function, welche in diesem Intervall nie vom Abnehmen ins Zunehmen oder umgekehrt übergeht, und auf welche daher der vorige Satz anwendbar ist. Es wird daher das Integral

$$\int_0^h \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta} f(\beta)\,d\beta,$$

wenn man $n = \infty$ setzt, $\frac{\pi}{2} f(0) = \frac{\pi}{2} f(g)$ sein. Zerlegt man dasselbe Integral in die folgenden:

$$\int_0^g \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta} f(\beta)\,d\beta + \int_g^h \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta} f(\beta)\,d\beta,$$

so wird auch das erste $= \frac{\pi}{2} f(0) = \frac{\pi}{2} f(g)$ nach dem vorigen Satz, also muss das zweite für ein unendliches n verschwinden. Es gilt also der Satz:

(18) »Sind g und h Constanten, welche den Bedingungen genügen $g > 0$, $\frac{\pi}{2} \gtreqless h > g$, und geht die Function $f(\beta)$, wenn β von g bis h wächst, nie vom Abnehmen ins Zunehmen oder umgekehrt über, so wird das Integral

$$\int_g^h \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta} f(\beta)\,d\beta$$

für ein unendlich grosses n der Null gleich.«

Vermittelst der Sätze (17) und (18) ist es nun leicht, die zu Ende des § 4 aufgestellte Behauptung zu beweisen.

§ 6.

Die Summe der $2n+1$ ersten Glieder der zu untersuchenden Reihe war durch das Integral:

[170] .
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\beta\, \varphi(\beta) \frac{\sin\left[(2n+1)\left(\frac{\beta-x}{2}\right)\right]}{2\sin\frac{\beta-x}{2}}$$

ausgedrückt. Wir haben früher vorausgesetzt, dass die Function $\varphi(\beta)$ für das ganze Intervall von $\beta=-\pi$ bis $\beta=\pi$ stetig ist; wir können jedoch, ohne die folgende Untersuchung im geringsten zu erschweren, die Annahme machen, dass $\varphi(\beta)$ für einzelne Werthe von β eine plötzliche Veränderung erleidet, ohne jedoch unendlich zu werden. [9]) Die Curve, deren Abscisse β und deren Ordinate $\varphi(\beta)$ ist, besteht alsdann aus mehreren Stücken, deren Zusammenhang über den Punkten der Abscissenaxe, die jenen besonderen Werthen von β entsprechen, unterbrochen ist, und für jede solche Abscisse finden eigentlich zwei Ordinaten statt, wovon die eine dem dort endenden und die andere dem dort beginnenden Curvenstück angehört. Es wird im Folgenden nöthig sein, diese beiden Werthe von $\varphi(\beta)$ zu unterscheiden, und wir werden sie durch $\varphi(\beta-0)$ und $\varphi(\beta+0)$ bezeichnen. Um unnütze, die folgende Darstellung verlängernde Unterscheidungen zu vermeiden, bemerke man, dass dieselbe Bezeichnung auch für die Werthe von β gelten kann, für welche keine Unterbrechung der Stetigkeit stattfindet, wo dann $\varphi(\beta-0)$ und $\varphi(\beta+0)$ beide mit $\varphi(\beta)$ gleichbedeutend sind.

Das obige Integral lässt sich nach (9) in die folgenden zerlegen:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{x} d\beta\, \varphi(\beta) \frac{\sin(2n+1)\left(\frac{\beta-x}{2}\right)}{2\sin\frac{\beta-x}{2}},$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{x}^{\pi} d\beta\, \varphi(\beta) \frac{\sin(2n+1)\left(\frac{\beta-x}{2}\right)}{2\sin\frac{\beta-x}{2}},$$

oder nach (4):

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-(\pi+x)}^{0} d\beta\,\varphi(x+\beta)\frac{\sin\,(2n+1)\frac{\beta}{2}}{2\sin\frac{\beta}{2}},$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi-x} d\beta\,\varphi(x+\beta)\frac{\sin\,(2n+1)\frac{\beta}{2}}{2\sin\frac{\beta}{2}}.$$

Wendet man (3) auf beide an und nachher noch (2) und (5) auf das erste, so kommt:

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi+x}{2}} d\beta\,\varphi(x-2\beta)\frac{\sin\,(2n+1)\beta}{\sin\beta},\\ &\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi-x}{2}} d\beta\,\varphi(x+2\beta)\frac{\sin\,(2n+1)\beta}{\sin\beta},\end{aligned}\right.$$

Wir betrachten jetzt das zweite dieser Integrale, abgesehen von dem constanten Factor $\frac{1}{\pi}$. Da x zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt, so liegt $\frac{\pi-x}{2}$ zwischen 0 und π. Ist $\frac{\pi-x}{2}=0$, was für $x=\pi$ der Fall ist, so ist das Integral für jedes n Null und erfordert keine weitere Untersuchung. Nehmen wir zunächst an, $\frac{\pi-x}{2}$ sei nicht grösser als $\frac{\pi}{2}$. Man bezeichne mit $e_1, e_2 \ldots e_\nu$, wie sie der Grösse nach aufeinander folgen, die Werthe [**171**] von β, für welche erstens $\varphi(x+2\beta)$ innerhalb des Intervalles von $\beta=0$ bis $\beta=\frac{\pi-x}{2}$, eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet und zweitens vom Zunehmen ins Abnehmen oder vom Abnehmen ins Zunehmen übergeht, und zerlege das Integral in andere zwischen den Grenzen 0 und e_1, e_1 und e_2, ... e_ν und $\frac{\pi-x}{2}$ genommene.

Auf alle diese neuen Integrale, mit Ausnahme des ersten, ist der Satz (18) offenbar anwendbar, da innerhalb der Grenze eines jeden die Function keine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet und nicht vom Abnehmen ins Zunehmen oder umgekehrt übergeht; alle nähern sich dabei ins Unendliche der Null, wenn man n über alle Grenzen hinaus wachsen lässt. Das erste hingegen erfüllt die Bedingungen (17) und geht bei unaufhörlichem Wachsen von n zuletzt in den Werth $\frac{\pi}{2}\varphi(x+0)$ über. Also wird das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi-x}{2}} d\beta\,\varphi(x+2\beta)\,\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}$$

für $n=\infty$ den Werth $\frac{\pi}{2}\varphi(x+0)$ annehmen.

Liegt $\frac{\pi-x}{2}$ über $\frac{\pi}{2}$, oder ist x negativ, so zerlege man das vorige Integral in zwei andere zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi-x}{2}$. Auf das erste dieser neuen Integrale bleibt das vorige Verfahren anwendbar, und dasselbe wird also $\frac{\pi}{2}\varphi(x+0)$, wenn man n unendlich gross werden lässt. Das andere

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} d\beta\,\varphi(x+2\beta)\,\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}$$

kann nach (4) und (5) in die Form gebracht werden:

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi+x}{2}} d\beta\,\varphi(x+2\pi-2\beta)\,\frac{\sin((2n+1)(\pi-\beta))}{\sin(\pi-\beta)}.$$

Wendet man (2) an und setzt $\sin\beta$ statt $\sin(\pi-\beta)$ und $\sin((2n+1)\beta)$ statt $\sin((2n+1)(\pi-\beta))$ (was erlaubt ist, da n eine ganze Zahl ist), so geht das Integral über in:

[172]
$$\int\limits_{\frac{\pi+x}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x+2\pi-2\beta)\,\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\,d\beta.$$

Da x, wie vorher gesagt wurde, in diesem Falle negativ ist und also zwischen 0 und $-\pi$ liegt, so ist $\frac{\pi+x}{2}$ positiv und von Null verschieden, den einzigen Fall ausgenommen, wo $x=-\pi$. Zerlegt man das Integral in andere, zwischen deren Grenzen $\varphi(x+2\pi-2\beta)$ weder eine Unterbrechung der Continuität erleidet noch aus dem Zunehmen ins Abnehmen oder umgekehrt übergeht, so werden alle diese Integrale nach (18) für $n=\infty$ der Null gleich. Dieses Resultat gilt nicht, wenn $\frac{\pi+x}{2}=0$ und also $x=-\pi$, da alsdann auf das erste der durch Zerlegung entstehenden Integrale nicht der Satz (18), sondern der Satz (17) angewendet werden muss. Dieses erste ist alsdann (wegen $x=-\pi$):

$$\int\limits_0^{e_1} d\beta\,\varphi(x+2\pi-2\beta)\,\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}$$

$$=\int\limits_0^{e_1} d\beta\,\varphi(\pi-2\beta)\,\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}$$

und wird also für $n=\infty$ den Werth $\frac{\pi}{2}\varphi(\pi-0)$ erhalten, während alle übrigen verschwinden.

Vereinigt man die verschiedenen, für das zweite Integral (19) gefundenen Resultate, so ergiebt sich, dass dieses Integral durch unaufhörliches Wachsen der darin enthaltenen ganzen Zahl n für jedes zwischen $-\pi$ und $+\pi$ gelegene x in den Werth $\frac{1}{2}\varphi(x+0)$ übergeht. Für $x=\pi$ und $x=-\pi$ erleidet das Resultat eine Ausnahme: in dem ersteren Falle ist das Integral Null, im anderen wird es $\frac{1}{2}[\varphi(\pi-0)+\varphi(\pi+0)]$. Aus einer ganz ähnlichen Untersuchung des ersten Integrals (19) folgt, dass dasselbe für $n=\infty$ im Allgemeinen $\frac{1}{2}\varphi(x-0)$ wird, in den besonderen Fällen aber, in $x=-\pi$ und $x=\pi$, respective Null und $\frac{1}{2}[\varphi(\pi-0)+\varphi(-\pi+0)]$.

Erinnert man sich nun, dass die beiden Integrale (19) zusammengenommen die Summe der $2n+1$ ersten Glieder der Reihen darstellen:

$$(20)\quad \tfrac{1}{2}b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \cdots + b_m \cos mx + \cdots$$
$$+ a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_m \sin mx + \cdots,$$

wo die Coefficienten durch die Gleichungen

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\beta\, \varphi(\beta) \cos m\beta, \quad a_m = \int_{-\pi}^{+\pi} d\beta\, \varphi(\beta) \sin m\beta$$

zu bestimmen sind, so geht aus dem Vorhergehenden ganz streng hervor, dass diese Reihe immer convergirt, d. h. dass es immer einen gewissen Werth giebt, von dem die Summe der $2n+1$ ersten Glieder der Reihe, wenn n über alle Grenzen hinaus wachsend gedacht wird, zuletzt immerfort [**173**] um weniger als jede angebbare Grösse verschieden sein wird, und dass dieser Werth oder die Summe der unendlichen Reihe, wenn x zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt durch $\frac{1}{2}[\varphi(x+0)+\varphi(x-0)]$, für $x=\pi$ und $x=-\pi$ aber durch $\frac{1}{2}[\varphi(\pi-0)+\varphi(-\pi+0)]$ dargestellt wird.

Dieses Resultat umfasst alle Fälle; ist x keiner von den besonderen Werthen, für welche die Stetigkeit von $\varphi(x)$ unterbrochen wird, so sind $\varphi(x+0)$ und $\varphi(x-0)$ einander gleich, und der Werth der Reihe wird also $\varphi(x)$. Wo eine Unterbrechung der Stetigkeit eintritt und also die Function $\varphi(x)$ eigentlich zwei Werthe hat, stellt die Reihe, welche ihrer Natur nach für jedes x einwerthig ist, die halbe Summe dieser Werthe dar. An den Grenzen des Intervalles von $-\pi$ bis $+\pi$, d. h. für diese Werthe selbst ist die Summe der unendlichen Reihe gleich der halben Summe der beiden Werthe $\varphi(\pi)$ und $\varphi(-\pi)$. Man sieht daraus, dass die Reihe die Function $\varphi(x)$ aus den Grenzen des Intervalles nur dann richtig darstellt, wenn $\varphi(\pi)=\varphi(-\pi)$.[10])

Wir haben schon früher bemerkt, dass die eben untersuchte Reihe (20) oder (15) die Reihen (13) und (14) als specielle Fälle in sich begreift. Man braucht nur die Function $\varphi(x)$ für den halben Umfang des Intervalles, nämlich $x=0$ bis $x=\pi$ ganz beliebig gegeben zu denken und für die Werthe zwischen 0 und $-\pi$ fortgesetzt zu denken, wie es die Gleichungen $\varphi(-x)=\varphi(x)$ oder $\varphi(-x)=-\varphi(x)$

vorschreiben, um respective zu (14) und (13) zu gelangen. Ich will dies noch mit zwei Worten für den ersten Fall zeigen, weil sich aus dieser Ableitung eine Eigenschaft der Reihe (14) ergiebt, welche bei der früheren Behandlung nicht hervortrat. Setzt man die von 0 bis π beliebige Function $\varphi(x)$ nach der Gleichung $\varphi(-x) = \varphi(x)$ fort, so ist klar, dass für $x = 0$ keine Unterbrechung der Stetigkeit eintreten und dass $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$ sein wird. Die Reihe (20) wird also $\varphi(0)$ für $x = 0$, und $\varphi(\pi)$ für $x = \pi$. Die Gleichungen für die Coefficienten werden durch Zerlegen der darin enthaltenen Integrale:

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} d\beta\,\varphi(\beta)\cos m\beta + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} d\beta\,\varphi(\beta)\cos m\beta,$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} d\beta\,\varphi(\beta)\sin m\beta + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} d\beta\,\varphi(\beta)\sin m\beta.$$

Wendet man auf die beiden von $-\pi$ bis 0 genommenen Integrale nach einander (5) und (2) an, und berücksichtigt, dass $\varphi(-\beta) = \varphi(\beta)$, $\cos(-m\beta) = \cos m\beta$, $\sin(-m\beta) = -\sin m\beta$, so erhält man

$$b_m = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} d\beta\,\varphi(\beta)\cos m\beta, \quad a_m = 0.$$

Die von $x = 0$ bis $x = \pi$ ganz beliebige Function $\varphi(x)$ wird also durch die Reihe

[**174**]. $\frac{1}{2}b_0 + b_1\cos x + b_2\cos 2x + \cdots + b_m\cos mx + \cdots$

dargestellt, welche auch für die das Intervall begrenzenden Werthe 0 und π noch gültig ist. Es versteht sich dabei von selbst, dass, wenn $\varphi(x)$ zwischen 0 und π eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet, die Reihe für jeden solchen Werth von x die halbe Summe der entsprechenden Werthe von $\varphi(x)$ ausdrückt. Auf ganz ähnliche Weise gelangt man zu der Reihe (13) und findet, dass diese im Allgemeinen für $x = 0$ und $x = \pi$ nicht mehr richtig ist, was sich aber in diesem Falle ganz von selbst versteht, da die Reihe, wie auch ihre Coefficienten beschaffen sein mögen, für die genannten Werthe verschwindet.

Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen.

Von

Ph. L. Seidel.

(Abhandl. der Math. Phys. Klasse der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften V, 381—394 (München 1847).

[**381**] Man findet in *Cauchy*'s Cours d'Analyse algébrique Cap. 6, § 1 einen Lehrsatz, welcher ausspricht, dass die Summe einer convergirenden Reihe, deren einzelne Glieder Functionen einer Grösse x und zwar continuirlich in der Nähe eines bestimmten Werthes von x sind, immer gleichfalls in dieser Gegend eine stetige Function derselben Grösse sei. Hieraus würde folgen, dass Reihen der vorausgesetzten Art nicht geeignet sind, discontinuirliche Functionen in der Nähe der Stellen, wo ihre Werthe springen, noch darzustellen; — mit anderen Worten: dass durch ein Aggregat stetiger Grössen discontinuirliche auch dann nie repräsentirt werden können, wenn man die Form des Unendlichen zu Hülfe nimmt, so dass das Letztere nicht, wie es einen Uebergang vom Rationalen zum Irrationalen bildet, so auch die Brücke zwischen stetigen und nicht stetigen Grössen zu schlagen vermöchte. Denn die Convergenz der Reihe würde aufhören, also die gewählte Form ihren Sinn verlieren, wo die Discontinuität beginnt.

[**382**] Der Beweis, auf welchen dieser Satz am angeführten Orte begründet wird, beruht im Wesentlichen auf der Bemerkung, dass man die Summe der ganzen Reihe abtheilen kann in die Summe einer Anzahl n ihrer ersten Glieder und in die ergänzende alles Folgenden. Die letztere kann man, was auch x sei, bei der vorausgesetzten Convergenz der Reihe, durch

Vergrösserung von n so klein machen, als man nur will; dasselbe wird von der Veränderung geschlossen, die sie erleidet, wenn x um wenig geändert wird; das Increment der Summe der n ersten Glieder nimmt ohnedies, da sie aus einer endlichen Zahl continuirlicher Functionen von x besteht, zugleich mit der Aenderung von x unendlich ab; es scheint also, dass man n so gross und das Increment von x so klein wählen kann, dass die Aenderungen beider Theile, also auch die der ganzen Reihe, kleiner gemacht werden, als eine beliebig kleine Grösse, und hiermit wäre die Continuität der Summe der Reihe in dem Sinne, in welchem sie hier genommen wird, erwiesen.

Gleichwohl steht der Satz in Widerspruch mit dem was *Dirichlet* gezeigt hat, dass z. B. die *Fourier*'schen Reihen auch dann immer convergiren, wenn man sie zwingt, discontinuirliche Functionen[11] darzustellen; — ja, die Discontinuität wird gerade durch die Form dieser Reihen, deren einzelne Glieder doch stetige Functionen sind, häufig hereingebracht, indem diese Periodicität, welche den goniometrischen Functionen eigen ist, allen, die man so darstellen will, aufdrängt, und dadurch diejenigen, welche sich nicht von selbst unter dies Gesetz beugen, gewaltsam discontinuirlich macht. Man braucht selbst nicht dem intricaten Gang der *Dirichlet*'schen Beweise nachzugehen, um sich zu überzeugen, dass die Allgemeinheit des Satzes, von welchem die Sprache ist, Einschränkungen hat: auch die gewöhnlichsten Integrale, welche discontinuirliche Werthe haben, z. B. das bekannte

[383]
$$\int_0^\infty \frac{\sin x\alpha}{\alpha} d\alpha\,,$$

können Beispiele[12] davon abgeben; denn man kann dieses, durch blosse Zerlegung des unendlichen Intervalles, in welchem es zu nehmen ist, in eine unendliche Anzahl endlicher, verwandeln in eine Reihe, deren einzelne Glieder Integrale sind, von denen man fast à vue beweist, dass sie stetig von x abhängen, und welche Reihe nothwendig stets convergirt, weil ihre Summe immer einem der drei möglichen Werthe des ganzen Integrales gleich ist.

Wenn man ausgehend von der so erlangten Gewissheit, dass der Satz nicht allgemein gelten kann, also seinem Beweise noch irgend eine versteckte Voraussetzung zu Grunde

liegen muss, denselben einer genaueren Analyse unterwirft, so ist es auch nicht schwer, die verborgene Hypothese zu entdecken; man kann dann rückwärts schliessen, dass diese bei Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen, nicht erfüllt sein darf, indem nur so die Uebereinstimmung der übrigens richtigen Schlussfolge mit dem, was andererseits bewiesen ist, gerettet werden kann. Auf solche Art erhält man einen Satz, welcher sich auf diese Klasse von Reihen bezieht, und so ausgesprochen werden kann:

Theorem.

Hat man eine convergirende Reihe, welche eine discontinuirliche Function einer Grösse x darstellt, von der ihre einzelnen Glieder continuirliche Functionen sind, so muss man in der unmittelbaren Umgebung der Stelle, wo die Function springt, Werthe von x angeben können, für welche die Reihe *beliebig langsam* convergirt.

[**384**] Der Zweck des gegenwärtigen Aufsatzes ist es, diese Eigenschaft nachzuweisen, welche meines Wissens noch nirgends ausdrücklich hervorgehoben worden ist. Durch sie würde diese Art der Darstellung nicht stetiger Functionen wesentlich an Werth verlieren, wenn es sich dabei darum handelte, aus der Reihe die Functionswerthe in der Gegend wo sie springen[13]) wirklich numerisch zu berechnen, ein Fall, der aber in den Anwendungen, wo der umgekehrte häufiger ist, sehr selten vorkommen wird. Zu bemerken ist, dass hier unter discontinuirlichen Functionen nur solche verstanden sind, welche Stellen haben, wo es nicht möglich ist, die Aenderung der Variabeln so klein zu machen, dass die der Function kleiner würde, als eine beliebig kleine Grösse: also nur Functionen, welche graphisch durch Curven repräsentirt sind, deren Ordinaten an gewissen Stellen plötzlich springen.[14])

Die Reihe, welche nur für Werthe der Veränderlichen (x) betrachtet werden soll, für welche sie convergirt und demnach irgend eine Function von x darstellt, möge sein:

$$f(x, 0) + f(x, 1) + f(x, 2) + \cdots \text{ in inf.}$$

Ihre ganze Summe werde ich bezeichnen mit $F(x)$, die Summe ihrer $n + 1$ ersten Glieder oder die Grösse

$$f(x, 0) + f(x, 1) + \cdots + f(x, n)$$

mit $S_n(x)$, die alles Folgenden oder den Ausdruck

$$f(x, n+1) + f(x, n+2) + \cdots \text{ in inf.}$$

mit $R_n(x)$. Man hat also

[**385**] (1) $$F(x) = S_n(x) + R_n(x).$$

Ueber die hier vorkommenden Grössen wissen wir nur dies, dass man n so gross nehmen kann, dass $R_n(x)$ kleiner wird, als eine beliebig kleine Grösse ϱ (d. h. dass die Reihe convergirt), und dass $S_n(x)$, so lange n nicht über alle Grenzen wächst, eine continuirliche Function von x ist. Denn es ist die Summe einer beschränkten Zahl Glieder, welche einzeln, der Voraussetzung nach, diese Bedingung erfüllen. Es gehe nun x über in $x + \varepsilon$ und dadurch ändere sich $F(x)$ um $\varDelta F$, $S_n(x)$ um $\varDelta S_n$. So wird auch sein:

(2) $$F(x) + \varDelta F = S_n(x) + \varDelta S_n + R_n(x + \varepsilon),$$

und wenn man hiervon die Gleichung (1) subtrahirt:

(3) $$\varDelta F = \varDelta S_n + R_n(x + \varepsilon) - R_n(x).$$

Soll sich nun beweisen lassen, dass in einem besonderen Falle $F(x)$ eine continuirliche Function von x ist, oder dass $\varDelta F$ mit ε zugleich unendlich abnimmt, so wird man zeigen müssen, dass die drei Grössen zur Rechten in der letzten Gleichung sich gleichzeitig so sehr verkleinern lassen, als man nur immer will. Da man nämlich im voraus nicht weiss, ob $R_n(x)$ eine continuirliche Function ist, so kann man im Allgemeinen nicht anders darauf ausgehen, den Unterschied

$$R_n(x + \varepsilon) - R_n(x)$$

zu verkleinern, als dadurch, dass man jede dieser Grössen für sich sehr klein macht. Dies muss durch Vergrösserung von n geschehen, während man durch Verkleinerung von ε bewirkt, dass $\varDelta S_n$ unendlich abnimmt. Zum Beweise der Continuität von $F(x)$ in der [**386**] Gegend des bestimmten Werthes x wird also erforderlich sein, zu zeigen, dass man für diesen Werth gleichzeitig n so gross, aber endlich, und ε so klein, aber von Null verschieden machen kann, dass die drei Bedingungen erfüllt werden:

$$(4) \qquad \begin{cases} \Delta S_n < \tau \\ R_n(x) < \varrho' \\ R_n(x+\varepsilon) < \varrho'', \end{cases}$$

wo τ, ϱ', ϱ'' beliebig klein anzunehmende absolute Grössen bezeichnen, und sämmtliche Ungleichheiten abgesehen vom Zeichen zu nehmen sind. Bestehen sie alle zugleich, so wird dann aus (3) ΔF dem Zahlenwerthe nach $< \tau + \varrho' + \varrho''$, kann also so klein gemacht werden, als man nur will.

Was zunächst die Erfüllung der beiden letzten Ungleichheiten betrifft, so kann man folgende Betrachtung anstellen:

Es bezeichne η einen bestimmten, von Null verschiedenen Werth des Incrementes ε von x. So klein es auch gewählt sein mag, so wird man doch nachher τ so klein annehmen können (was in der Willkür liegt), dass für das Bestehen der ersten Ungleichheit in (4) erforderlich ist, $\varepsilon < \eta$ zu nehmen; wir können also 0 und η als die möglichen Grenzwerthe von ε ansehen. Es sei nun ϱ eine Grösse, kleiner als der kleinere der beiden Werthe ϱ' und ϱ'', und man verstehe unter ν (abhängig von ε) die möglichst kleine positive ganze Zahl, welche gleichzeitig allen Bedingungen genügt:

$$(5) \qquad \begin{cases} R_\nu(x+\varepsilon) < \varrho \\ R_{\nu+1}(x+\varepsilon) < \varrho \\ R_{\nu+2}(x+\varepsilon) < \varrho \\ \text{u. s. w. in inf.} \end{cases}$$

[387] (Bedingungen, die sich, bei der vorausgesetzten Convergenz der Reihe, immer müssen erfüllen lassen) — so können zwei Fälle eintreten: entweder es wird, (I) während ε alle Werthe von 0 bis η durchläuft (einschliesslich der Grenzen), ν für irgend einen darunter liegenden einen Maximalwerth erlangen (und dann überhaupt nur eine endliche Zahl verschiedener Werthe haben), oder (II) es kann ν in der nächsten Nähe von $\varepsilon = 0$, zugleich mit dem ohne Ende abnehmenden ε, über alle Grenzen wachsen. Geschähe nämlich das Letztere in der Nähe eines anderen bestimmten Werthes von ε als bei $\varepsilon = 0$, so würde man diesen dadurch ausschliessen können, dass man η kleiner machte, so dass er nicht mehr in das Intervall von 0 bis η fiele. Es braucht also nur der eben bezeichnete Fall berücksichtigt zu werden.

I. Findet nun von den beiden Möglichkeiten die erste wirklich statt, dass es nämlich einen Maximalwerth N der Zahlen ν giebt, welche zu den ε zwischen 0 und η gehören, so wird es nur nöthig sein, für n in (4) diese Zahl N zu nehmen, um vermöge der Bedingungen in (5) sicher zu sein, dass den beiden letzten der drei Ungleichheiten genügt ist, wie auch ε in dem Intervalle gewählt werden möge. Diese Grösse wird man nun, was bei der Continuität der Function $S_n(x)$ immer möglich ist, so zwischen 0 und η und verschieden von dem ersteren Werthe anzunehmen haben, dass auch die erste Bedingung

$$\Delta S_n < \tau$$

erfüllt ist, und für jedes noch kleinere ε erfüllt bleibt; man wird dann also vermöge (3) und (4) haben

$$\Delta F < \tau + \varrho' + \varrho'',$$

oder da die Grössen zur Rechten beliebig klein angenommen werden [**388**] können, so wird gezeigt sein, dass die Aenderung der durch die Reihe dargestellten Function $F(x)$ zugleich mit dem Incremente ε der Variabeln x unendlich abnimmt, dass also die ganze convergirende Reihe, deren einzelne Glieder stetig von x abhängen, ebenfalls eine in der Nähe des bestimmten Werthes von x continuirliche Function dieser Grösse darstellt. In diesem ersten Falle ergiebt sich also wirklich der *Cauchy*'sche Satz.

II. Anders verhält es sich mit dem oben mit II bezeichneten Falle, zu dessen Betrachtung ich mich jetzt wenden werde.

Es könnte auf den ersten Anblick scheinen, als ob dieser Fall, dass nämlich für sehr kleine ϱ und in der nächsten Nähe von $\varepsilon = 0$ die durch die Ungleichheiten (5) definirte kleinste Zahl ν über alle Grenzen wächst, gar nicht eintreten könnte. Denn da die Reihe für alle Werthe von ε zwischen 0 und η convergirt, so muss sich für jeden von ihnen ein endliches ν angeben lassen, welches jene Ungleichheiten alle erfüllt. Daraus folgt aber durchaus nicht, dass alle solchen ν unter einer bestimmten Grenze $N + 1$ liegen müssen. Es könnte z. B. in einem besonderen Falle der Zusammenhang, welcher vermöge der Bedingungen (5) zwischen ε und ν stattfindet, der Art sein, dass ν die grösste in dem Ausdrucke

$$\frac{1}{\varepsilon}$$

enthaltene ganze Zahl wäre, — so würde es für jedes von 0 verschiedene ε endlich bleiben, und doch alle Grenzen überschreiten. Man könnte einwenden, dass der hier beispielsweise angenommene Zusammenhang zwischen ν und ε und ebenso alle ähnlichen deshalb unstatthaft sei, weil nach ihm für $\varepsilon = 0$ die Zahl ν unendlich, also die Reihe, gegen die Voraussetzung, für diesen Werth divergent würde.[15]) So darf aber nicht geschlossen werden. Denn, [**389**] da man im voraus nichts darüber weiss, ob die Grössen $R_\nu(x+\varepsilon)$, $R_{\nu+1}(x+\varepsilon)$ u. s. w. continuirliche Functionen von (x oder) ε sind (was ja eben durch den *Cauchy*'schen Satz erst bewiesen werden soll), und überhaupt im Allgemeinen nichts über sie weiss, als dass sich die Bedingungen (5) immer erfüllen lassen, so kann auch nicht behauptet werden, dass nach denselben ν mit einer gewissen Regelmässigkeit, einer Art von Continuität, von ε abhängt, und es könnte sehr wohl sein, dass es, um bei dem gewählten Beispiele zu bleiben, für jedes von 0 verschiedene, sonst beliebig kleine, ε die grösste in

$$\frac{1}{\varepsilon}$$

enhaltene ganze Zahl wäre, für $\varepsilon = 0$ aber, die Continuität des Gesetzes verlassend, gleichwohl keine unendliche, sondern irgend eine bestimmte Grösse hätte. Also würde in dem Beispiele sich in der That für jedes ε, die Null eingeschlossen, ein endliches ν angeben lassen, welches die Bedingungen (5) erfüllt, und doch kein Grenzwerth, unter welchem alle diese ν liegen. Mit anderen Worten: die Reihe wird zwar für die betrachteten Werthe der Variabeln immer convergiren, wie es die Voraussetzung fordert, aber man wird, in der nächsten Nähe von $\varepsilon = 0$, Stellen angeben können, wo sie es beliebig langsam thut, d. h. wo man, um sicher zu sein, dass die Summe aller weggelassenen Glieder $< \varrho$ ist, die Anzahl der mitgenommenen grösser machen muss, als eine beliebig grosse Zahl N. Ein ähnliches Verhalten kommt auch schon bei den gewöhnlichen Reihen, die continuirliche Functionen darstellen, vor, so z. B. convergirt die Reihe

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

immer, setzt man aber z. B. $x = 1000000$, so wird man bei der [**390**] Berechnung ihrer Summe, selbst wenn man eine

Million Glieder mitnimmt, noch einen enormen Fehler begehen, und für $x =$ Einer Billion müsste man weit über eine Billion Glieder addiren, um einige Annäherung zu erhalten, u. s. w.

Die Möglichkeit also, dass die vorgelegte Reihe in der Gegend von $\varepsilon = 0$, oder in der nächsten Nähe des Werthes x der Variabeln Stellen hat, wo sie beliebig langsam convergirt, lässt sich nicht leugnen. Es kann also geschehen, dass sich die in den obigen Erörterungen mit N bezeichnete endliche Zahl nicht angeben lässt, und alsdann bricht der ganze Beweis von der Continuität der Function $F(x)$ zusammen, welcher unter (I) auf die Voraussetzung der Existenz eines solchen Werthes gegründet worden, und in der That nur eine detaillirtere Ausführung desjenigen Beweises ist, welchen *Cauchy* am angeführten Orte mittheilt. Man würde sich auch vergebens für diesen Fall nach einem anderen Beweise umsehen; das thatsächliche Vorhandensein convergirender Reihen, welche discontinuirliche Functionen einer Variabeln repräsentiren, von der ihre einzelnen Glieder stetig abhängen, lässt an einen solchen nicht denken. Man kann also nur schliessen, dass Reihen dieser Art in der Nähe desjenigen Werthes der absolut Veränderlichen, für welchen sie springen, sich nothwendig in dem hier mit II. bezeichneten Falle befinden müssen; also in der Gegend dieses Werthes beliebig langsam convergiren, diesen Ausdruck in dem Sinne genommen, welcher festgestellt worden ist. Hiermit ist das oben aufgestellte Theorem erwiesen.

Man sieht, wie bei solchen Reihen die Darstellung der Discontinuität der Summe gewissermaassen durch eine Discontinuität im Verhalten der Reihe selbst erreicht wird. Die Convergenz derselben wird in der Nähe der Stelle, wo die Functionalwerthe springen, immer geringer, d. h. um dadurch, dass man die Reihe irgendwo [**391**] abbricht, um einen Fehler zu begehen, kleiner als eine sehr kleine Grösse ϱ, wird man eine Gliederzahl N berücksichtigen müssen, welche in dem Maasse, wie man der discontinuirlichen Stelle ($\varepsilon = 0$) näher rückt, immerfort und über jede bestimmte Zahl hinaus zunimmt. Die Grenze hiervon wäre, dass für $\varepsilon = 0$ selbst keine noch so grosse Anzahl mitgenommener Glieder der Bedingung genügte, den begangenen Fehler $< \varrho$ zu machen, d. h. dass für $\varepsilon = 0$, oder an der unstetigen Stelle, die Reihe zu convergiren aufhörte, also den Sprung der Function nicht repräsentirte. Diese Inconvenienz wird aber dadurch vermieden, dass die

Anzahl N der Glieder, welche mitgenommen werden müssen, selbst eine discontinuirliche Function von ε wird (— der Ausdruck, nicht genau, weil N immer eine ganze Zahl ist, wird gleichwohl verständlich sein —), die zwar, wenn ε von der positiven oder der negativen Seite her sich der Null nähert, über alle Grenzen wächst, doch aber für $\varepsilon = 0$ keine unendliche, sondern eine ganz bestimmte Grösse hat. Denkt man sich also, dass ε z. B. von der negativen Seite her sich der Null nähert, so wird das zugehörige N von einem bestimmten Werthe an über alle Schranken hinaus wachsen; im Augenblick, wo ε gleich Null wird, fällt es plötzlich von seiner Höhe auf einen bestimmten Werth herab, um von diesem, sobald ε die Null passirt hat, sogleich aufs Neue zu Werthen überzugehen, welche grösser sind als alle noch so gross gegebenen. Die Grösse N, die als eine ganze Zahl sich überhaupt ruckweise ändert, macht also an der Stelle, wo die Function discontinuirlich ist, einen unendlichen Sprung in zwei Absätzen, herab und wieder hinauf. Das Springen in zwei Absätzen ist bekanntlich auch den Functionen selbst eigen, welche durch die *Fourier*'schen Reihen dargestellt werden, ebenso den Werthen des oben angeführten Integrales

$$\int_0^\infty \frac{\sin x\alpha}{\alpha}\, d\alpha$$

und andern.

[**392**] Die Anzahl N der Glieder, welche man von der unendlichen Reihe berücksichtigen muss, um sicher zu sein, dass kein Fehler $> \varrho$ aus der Vernachlässigung aller folgenden entspringen kann, ist natürlich abhängig von ϱ. Wenn dieses eine bestimmte Grösse übersteigt, so wird man im Allgemeinen immer sicher sein, ein bestimmtes endliches N aufstellen zu können, welches für alle Werthe der absolut Variabeln innerhalb gewisser Grenzen $(x \pm \eta)$ seiner Definitionsbedingung genügt. Bei einer bestimmten vorgelegten Reihe muss daher der hier mit II. bezeichnete Fall als vorhanden angesehen werden, sobald er für sehr kleine ϱ eintritt. Bei Reihen also, welche der Kategorie II angehören (und hierunter müssen alle sein, welche discontinuirliche Functionen einer Grösse x darstellen, von der ihre einzelnen Glieder stetig abhängen), wird es einen gewissen ausgezeichneten Werth von ϱ, P geben, derart, dass man so lange $\varrho > P$

ist, immer ein bestimmtes N so angeben kann, dass für ε zwischen 0 und η

$$R_N(x+\varepsilon) < \varrho$$
$$R_{N+1}(x+\varepsilon) < \varrho$$
$$R_{N+2}(x+\varepsilon) < \varrho$$
u. s. w. in inf.

dass hingegen, sobald ϱ unter P herabsinkt, diese Ungleichheiten sich nicht mehr für alle ε gleichzeitig erfüllen lassen, so nahe auch die beiden Grenzen 0 und η derselben zusammenfallen mögen.

Die Eigenschaft also, dass es für jede Gegend, wo die dargestellte Function springt, eine solche Grösse p giebt, muss allen Reihen von der betrachteten Art zukommen, wobei es übrigens, wenigstens so lange nicht das Gegentheil besonders erwiesen ist, denkbar wäre, dass bei bestimmten Reihen P unendlich würde, oder wie man es auch aussprechen kann: es ist möglich, dass Reihen existiren, [**393**] wo in der unmittelbaren Nähe ganz bestimmter Werthe der Veränderlichen sich Stellen angeben lassen, für welche die immer stattfindende Convergenz so langsam eintritt, dass der begangene Fehler, bis zu welcher noch so grossen vorgegebenen Zahl N von Gliedern man auch gegangen sein möge, immer noch grösser bleibt, als eine beliebig grosse Zahl*). Der allgemeinere Fall wird hingegen der sein, dass er nur grösser bleibt als eine bestimmte Zahl P oder jede darunter liegende. Dies ist nothwendig, damit die Reihe eine discontinuirliche Function darzustellen im Stande sei; dagegen ist es, bis auf weitere Untersuchung, nicht ausgeschlossen, dass derselbe Fall auch bei Reihen vorkäme, deren Werthe nicht springen.[16]) Die Grösse P, oder besser irgend eine Function derselben, die mit wachsendem P abnimmt, könnte man als eine Art Maass der Convergenz der Reihe betrachten, auf welche sie sich bezieht.

Es wird nicht nöthig sein, noch besonders die Anwendung auszuführen, welche das Gesagte auch auf bestimmte Integrale

---

*) Aehnlich, wie man dies bei der schon oben angeführten Reihe für e^x machen kann, aber bei dieser nicht, wie es im Falle des Textes gefordert wird, ohne dass x gewisse enge Grenzen überschreitet.

leitet, die discontinuirliche Functionen repräsentiren.[17]) Ist zunächst wenigstens eine Grenze des Integrales unendlich, so kann man es, durch blosse Abtheilung in endliche Intervalle, auf eine unendliche Reihe der besprochenen Art zurückführen; sind beide Grenzen endlich, so wird das Integral durch Einführung einer neuen Variabeln u. s. w. in eins von unendlicher Ausdehnung verwandelt werden können. Ist die unterm Integralzeichen stehende Function continuirlich, so kann übrigens der Werth des Ganzen, wie leicht zu zeigen, nur dadurch discontinuirlich sein, dass die Function innerhalb des Intervalles unendlich wird: also ist auch in diesem Falle die Unendlichkeit der Form eigentlich schon gegeben.

Anmerkungen.

Gustav Peter Lejeune Dirichlet, geboren den 13. Februar 1805 zu Düren, gestorben den 5. Mai 1859 in Göttingen, war einer der bedeutendsten deutschen Mathematiker des neunzehnten Jahrhunderts. Er zeigte schon von Jugend an grosse Vorliebe für Mathematik und kaufte sich für sein Taschengeld mathematische Bücher, die er »so lange las, bis er sie verstand«. Auf Wunsch seiner Eltern sollte er eigentlich Kaufmann werden, erreichte es aber, dass er studiren durfte. 1817—1819 besuchte er das Gymnasium in Bonn, 1819—1821 das Jesuitengymnasium in Köln. Er setzte es durch, Mathematik studiren zu dürfen (statt Jurisprudenz, wie seine Eltern wünschten) und zwar in Paris, wo er sich als Hauslehrer seinen Unterhalt erwarb. Indessen wurde er mehr gefördert durch seine Privatstudien (er war einer der ersten, welche die *Gauss*'schen *Disquisitiones arithmeticae* wirklich verstanden haben) und den Verkehr mit *Fourier*, der in ihm das Interesse für die mathematische Physik erweckte, als durch die Vorlesungen an der *Faculté des sciences*.

1826 kehrte er nach Deutschland zurück, habilitirte sich auf *A. v. Humboldt*'s Veranlassung 1827 in Breslau, kam 1828 nach Berlin an die Kriegsschule und wurde 1831 Professor an der Universität und Mitglied der Akademie. In Berlin erwarb er sich schnell grosses Ansehen und hatte einen gewaltigen Lehrerfolg. Trotzdem nahm er 1855 den Ruf nach Göttingen als Nachfolger von *Gauss* an, weil er in Berlin nicht von seiner Stellung an der Kriegsschule befreit wurde. Er versammelte auch in Göttingen einen grossen Kreis von jungen Mathematikern um sich. — An einem Herzleiden, das sich plötzlich entwickelt hatte, starb er im Jahre 1859.

Dirichlet's wissenschaftliche Verdienste bestehen einerseits in seinen zahlentheoretischen Arbeiten, welche an *Gauss*

anknüpften und namentlich durch Anwendung von Functionentheorie viele Probleme lösen. Durch seine Vorlesungen über Zahlentheorie (herausgegeben von *Dedekind*) hat er ferner das Verständniss der Disquisitiones arithmeticae von *Gauss* sehr erleichtert. Daneben war die Theorie der bestimmten Integrale und ihre Anwendung in der mathematischen Physik sein hauptsächlichstes Arbeitsgebiet, und er hat theils durch strengere Begründung schon vorhandener Methoden, wie in der vorliegenden Abhandlung, welche an *Fourier* anknüpft, theils durch Behandlung neuer Probleme aus der Wärmelehre, der Hydrodynamik, der Potentialtheorie und der Mechanik, Grosses geleistet. (Vgl. die Ausgabe der gesammelten Werke, herausgegeben von der Berliner Akademie, Berlin 1889 u. 1897.)

Philipp Ludwig (*von*) *Seidel*, geboren den 24. October 1821 in Zweibrücken, gestorben am 15. August 1896 in München, besuchte die lateinische Schule in Nördlingen, das Gymnasium in Nürnberg (1835) und das Gymnasium in Hof (bis 1839). Sein grosses Interesse und seine Befähigung für Mathematik veranlassten seinen Lehrer *Schnürlein*, der ihn auch privatim förderte, bei *S.*'s Vater es durchzusetzen, dass er Mathematik studiren durfte. (Sein Vater konnte sich anfangs nicht mit diesem Gedanken befreunden, »da man damit keinen Hund aus dem Ofen locken könne«.) Er studirte nun in Berlin bei *Dirichlet* und *Encke* (1840—1842), dann in Königsberg, wo die mathematischen Studien unter *Jacobi*, *Bessel* und *Neumann* blühten. 1842 ging er nach München, wo er auf *Steinheil*'s Veranlassung sich mit photometrischen Untersuchungen beschäftigte. 1846 fand seine Promotion statt, in demselben Jahre habilitirte er sich in München, wurde 1851 ausserordentlicher und 1855 ordentlicher Professor. Im Jahre 1896 starb er, nachdem er schon lange Zeit durch ein Augenleiden an der Ausübung seines Amtes verhindert war.

Seine Arbeiten bestehen in astronomischen Beobachtungen, optischen Untersuchungen und verschiedenen mathematischen Abhandlungen, in denen die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Lehre von den unendlichen Reihen bearbeitet wird (vgl. die Gedächtnissrede *F. Lindemann*'s auf *v. Seidel*, München 1898).

Lindemann sagt von den mathematischen Abhandlungen: »Wir sehen *Dirichlet*'s Einfluss in dem Bestreben, allgemein anerkannte und benutzte Methoden streng zu begründen und auf sichere Basis zu stellen.« Die Arbeit »Ueber neue Eigenschaften der Reihen, welche discontinuirliche

Functionen darstellen« »füllt eine wesentliche Lücke aus, indem zuerst der Begriff der ungleichmässigen Convergenz eingeführt wird, und so in der Theorie der trigonometrischen Reihen ein Räthsel gelöst wird, das *Dirichlet*'s Beweis für die Convergenz wohl umgangen, aber nicht erledigt hatte.«

Die in dem vorliegenden Hefte veröffentlichten Arbeiten stehen in einem engen Zusammenhange. Hatte *Dirichlet*'s Untersuchung gezeigt, dass eine convergente Reihe von unendlich vielen stetigen Functionen nicht nothwendig eine stetige Summe zu haben braucht, so hat *Seidel* aufgeklärt, dass der Grund der Unstetigkeit einer solchen Summe nur in der unendlich verlangsamten Convergenz bestehen kann.

Was nun speciell *Dirichlet*'s Arbeit über trigonometrische Reihen angeht, so sei bezüglich der Geschichte dieser Reihen verwiesen auf die Einleitung von *B. Riemann*'s Arbeit vom Jahre 1854: Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch trigonometrische Reihen (p. 266 ff. der zweiten Auflage der Ges. Werke, Leipzig 1892), ferner auf die Darstellung von *A. Sachse*: Versuch einer Geschichte der Darstellung willkürlicher Functionen einer Variabeln durch trigonometrische Reihen (p. 230—276 im dritten Bande der Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, Leipzig 1880), endlich auf die Biographien *A. Harnack*'s (von *A. Voss*, Math. Annalen, XXXII, 1888) und *P. Dubois-Reymond*'s (von *H. Weber*, Math. Annalen, XXXV, 1890).

Hier möge zur Einleitung Folgendes genügen:

Die Aufgabe, eine irgendwie gegebene Function in eine Reihe zu entwickeln, welche nach bestimmten Functionen fortschreitet (z. B. nach ganzen Potenzen der unabhängigen Variabeln, oder nach den trigonometrischen Functionen der Vielfachen), giebt zu folgenden Fragestellungen Anlass:

1. Wie sind die Coefficienten der Reihenentwicklung aus der gegebenen Function zu berechnen? (In der *Maclaurin*-schen Reihe ist z. B. der Coefficient von $x^n = \frac{f^{(n)}(o)}{n!}$.)

2. Stellt die nach dem in 1. gefundenen Gesetze entwickelte Reihe die Function auch wirklich dar? (Bekanntlich kann man z. B. $e^{-\frac{1}{x^2}}$ in keine *Maclaurin*'sche Reihe entwickeln; alle Coefficienten der Entwicklung verschwinden.)

3. Welche Eigenschaft muss eine Function haben, damit sie sich nach dem vorgeschriebenen Gesetze entwickeln lässt?

4. Ist die gefundene Entwicklung eindeutig?

5. Wann convergirt überhaupt eine Reihe der vorgeschriebenen Form? (d. h. welchen Bedingungen müssen die Coefficienten genügen, damit Convergenz stattfindet?)

Die erste Frage hat *Fourier* für trigonometrische Reihen auf zwei verschiedene Weisen gelöst [vgl. *Fourier*, Théorie analytique de la chaleur (Band I). Publiée par *G. Darboux*, Paris 1888]. Die erste, umständliche Methode ist folgende (p. 204 ff.): *F.* geht von der Annahme aus, dass die zu entwickelnde Function in Form einer Potenzreihe gegeben ist. Diese wird umgeformt in eine trigonometrische Reihe. Die Coefficienten der trigonometrischen Reihe haben eine Gestalt, aus der folgt, dass sie gewissen Differentialgleichungen zweiter Ordnung genügen, denen auch die bestimmten Integrale genügen, welche die wirklichen Coefficienten darstellen. Die zweite, einfachere Methode ist die Berechnung durch gliedweise vorgenommene Integration (p. 211). (Vgl. Anmerkung 6.) *Dirichlet* selbst hat in der hier veröffentlichten Arbeit eine dritte Methode gewählt, indem er ausgeht von der Coefficientenbestimmung bei einer trigonometrischen Reihe mit einer endlichen Anzahl von Gliedern (§ 3). — Eine vierte, sehr elegante Methode hat endlich in neuerer Zeit *A. Töpler* gegeben (Anz. der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien vom 7. XII, 1876): Die Aufgabe, eine gegebene Function in eine trigonometrische Reihe von endlicher Gliederanzahl und von der Form

$$\frac{b_0}{2} + b_1 \cos x \ldots + b_m \cos mx$$
$$+ a_1 \sin x \ldots + a_m \sin mx$$

zu entwickeln, führt genau auf die *Fourier*'schen Werthe für die Coefficienten, wenn man verlangt, dass die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum wird.

Endlich sei noch erwähnt, dass es Apparate giebt, welche die Berechnung des *Fourier*'schen Coefficienten auf graphischem Wege ermöglichen (z. B. *Henrici*'s harmonischer Analysator).

Die zweite Frage hat *Dirichlet* zum ersten Male einwandfrei beantwortet, und zwar in der Arbeit: Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent a représenter une fonction arbitraire entre des limites données (*Crelle*'s Journal 4, 1829,

p. 157—169 = p. 117—132 des ersten Bandes der gesammelten Werke, herausg. von *Kronecker*, Berlin 1889). Von dieser Arbeit ist die hier veröffentlichte (erschienen in *Moser* und *Dove*'s Archiv 1837 = Ges. Werke I, p. 133—160) eine Erweiterung und Ergänzung.

Der Grundgedanke von *Dirichlet* ist die Reduction auf das Integral (§ 4):

$$\int_0^\pi \varphi(\beta) \frac{\sin k\beta}{\sin\beta} d\beta,$$

dessen Grenzwerth für $k = \infty$ zu untersuchen ist. An dieses *Dirichlet*'sche Integral knüpfen auch alle späteren Untersuchungen über die zweite Frage an, wenn auch nicht, wie bei *Dirichlet* (§ 5), das Integral untersucht wird durch Zerlegung des Intervalles in Theilintervalle von der Länge $\frac{\pi}{k}$, für die $\sin k\beta$ sein Zeichen nicht wechselt. (Man vergleiche z. B. *C. Neumann*'s Buch: Ueber die nach Kreis-, Kugel- und Cylinderfunctionen fortschreitenden Entwickelungen, Leipzig 1881, Kap. 2, § 4, p. 38 ff.; *L. Kronecker*'s Vorlesungen über die einfachen und vielfachen Integrale, herausg. von *E. Netto*, Leipzig 1894, p. 70 ff.; *C. Jordan*'s Cours d'analyse II, zweite Aufl., Paris 1894, Kap. IV).

Die dritte Frage hat ebenfalls *Dirichlet* zum ersten Male behandelt: In seiner ersten Arbeit spricht er das Resultat aus, dass die Entwicklung möglich ist »*si la fonction $\varphi(x)$, dont toutes les valeurs sont supposées finies et déterminées ne présente qu'un nombre fini des solutions de continuité entre les limites $-\pi$ et π, et si en outre elle n'a qu'un nombre déterminé de maxima et minima entre ces mêmes limites.* (Vgl. Anmerkung 9.)

Man hat mehrfach versucht, diese »*Dirichlet*'schen Bedingungen« zu erweitern, und ist dabei zu anderen Bedingungen gelangt, welche sich zum Theil nicht mit ihnen decken (vgl. die oben genannten historischen Darstellungen, sowie die citirte Arbeit *Riemann*'s).

Die beiden letzten Fragen sind seit *Riemann* besonders in Angriff genommen worden; man findet eine Besprechung derselben in den oben citirten Biographien.

Soviel über die Bedeutung und historische Stellung der Arbeit von *Dirichlet*. Die Arbeit von *Seidel* ist eine nothwendige Ergänzung von *Dirichlet*'s Untersuchung. Den Grund

der Unstetigkeit einer convergenten Reihe von stetigen Functionen fand *Seidel* in der unendlich verlangsamten Convergenz. *G. Stokes* hat übrigens fast gleichzeitig dieselbe Entdeckung gemacht (vgl. Band I der Mathematical and physical papers, Cambridge 1880, p. 236—285). Eine sehr elegante Darstellung dieser Frage mit vielen Beispielen findet man auch in *G. Darboux*'s Mémoire sur les fonctions discontinues (Annales de l'École normale. II. Série, Tome 4, Paris 1875, p. 57—112).

Inhaltlich sei noch Folgendes bemerkt: Der Irrthum, dass eine convergente Reihe von stetigen Functionen eine stetige Summe haben müsse, beruht auf einer unerlaubten Vertauschung der Grenzübergänge.

Wir wollen setzen:

$$\begin{aligned} F(x) &= f_1(x) \ldots + f_n(x) + f_{n+1}(x) + \cdots \\ &= S_n(x) \qquad\qquad + R_n(x). \end{aligned}$$

Es sei ferner a ein bestimmter Werth von x. Dann ist wegen der vorausgesetzten Convergenz und Stetigkeit der einzelnen Glieder der Reihe:

$$\operatorname*{Limes}_{n=\infty} R_n(x) = 0 \text{ (auch für } x = a)$$

Ferner

$$\operatorname*{Limes}_{x=a} S_n(x) = S_n(a).$$

Dagegen brauchen die beiden Grössen

$$\operatorname*{Limes}_{x=a,\, n=\infty} R_n(x) \quad \text{und} \quad \operatorname*{Limes}_{n=\infty,\, x=a} R_n(x) \ (= 0)$$

nicht identisch zu sein; und diese Voraussetzung wird stillschweigend gemacht von *Cauchy*. Nur dann, wenn diese beiden Grenzwerthe identisch sind, ist die Function $F(x)$ stetig.

---

1) *Zu Seite 3.* Das Problem, durch welches *Fourier* auf trigonometrische Reihen geführt wurde, ist die Aufgabe, die Temperaturen der einzelnen Punkte einer rechteckigen homogenen Platte bei stationärer Wärmeströmung zu bestimmen (a. a. O. p. 222). Ferner werden trigonometrische Reihen in der Elasticitätslehre und in der Akustik angewendet (übrigens schon vor *Fourier*). Man vergleiche z. B. hierzu: *B. Riemann*, Partielle Differentialgleichungen und ihre Anwendung auf physikalische Fragen. Vierte Auflage. Neu bearbeitet von *H. Weber*.

Braunschweig 1900; *v. Helmholtz,* Vorlesungen über die mathematischen Principien der Akustik. Leipzig 1898; *Wangerin*'s Ausgabe der *Helmholtz*'schen Theorie der Luftschwingungen in offenen Röhren (Nr. 80 dieser Sammlung); *Rayleigh,* The theory of sound. Zweite Auflage. London 1894.

2) *Zu Seite 3.* *Dirichlet* giebt keine Definition der Stetigkeit im Intervalle ab. Dieselbe ist folgendermaassen zu definiren: Eine Function heisst stetig in einem Intervall, wenn sie in allen Punkten des Intervalles stetig ist; eine Function heisst stetig in einem Punkte x, wenn sie für jedes von Null verschiedene beliebig kleine ε eine von Null verschiedene Grösse δ angeben kann, so dass

$$\big(f(x + h\delta) - f(x)\big) < \varepsilon$$

ist, sobald h zwischen -1 und $+1$ liegt.

3) *Zu Seite 4.* d. h., wenn das bestimmte Integral sich nicht durch einfache Formeln auswerthen lässt.

4) *Zu Seite 5.* Dieser anschauliche Beweis ist, wie *Dirichlet* selbst hervorhebt, keineswegs streng. Es muss vielmehr gezeigt werden, und zwar durch rein analytische Betrachtungen, dass die Summe

$$\sum \delta_i f(x_i),$$

in der δ_i die Länge eines Theilintervalles und x_i irgend eine dem n-ten Theilintervalle angehörige Abscisse bedeutet, sich einer bestimmten Grenze nähert, wenn die einzelnen Theilintervalle unendlich klein werden, während ihre Anzahl über alle Grenzen wächst. (Ein sehr einfacher Beweis hierfür findet sich bei *Darboux* a. a. O. p. 73.)

5) *Zu Seite 8.* Bei dem Problem der schwingenden Saite ist z. B. die folgende Aufgabe zu lösen:

Bedeutet l die Länge der Saite, x die Entfernung eines Punktes von einem Endpunkt, y die Abweichung aus der Ruhelage (wo die Saite gespannt ist), t die Zeit, so ist zunächst

$$y = \sum_{n=1}^{n=\infty} (A_n \cos ant + B_n \sin ant) \sin \frac{nx\pi}{l}$$

die Gleichung, welche die Bewegung der einzelnen Punkte darstellt. Die Constanten A_i und B_i sind nun aus der Angabe zu bestimmen, dass zur Zeit $t = 0$ die Saite nicht nur eine

bestimmte Anfangsform hat $(y = f(x))$, sondern, dass die einzelnen Punkte auch vorgeschriebene Geschwindigkeiten haben

$$\left[\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0} = g(x)\right].$$

Hieraus folgt, dass die Coefficienten A_i und B_k aus den beiden Gleichungen

$$f(x) = \sum_1^\infty {}_n A_n \sin \frac{n x \pi}{l},$$

$$g(x) = a \cdot \sum_1^\infty {}_n n B_n \sin \frac{n x \pi}{l}.$$

zu bestimmen sind. Mit anderen Worten: es müssen $f(x)$ und $g(x)$ in trigonometrische Reihen entwickelt werden, die nach den Sinus der Vielfachen von $\frac{x\pi}{l}$ fortschreiten.

6) *Zu Seite 16.* Einfacher ist die folgende, von *Fourier* herrührende Methode, die Coefficienten zu bestimmen:

Indem man die beiden Seiten der Gleichung

$$f(x) = \frac{b_0}{2} + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \cdots$$
$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots$$

erst mit $\sin nx$ multiplicirt und dann integrirt von $-\pi$ bis $+\pi$; indem man ferner mit $\cos nx$ dasselbe ausführte, erhält man die Formeln:

$$b_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Dabei ist Gebrauch gemacht von den Formeln

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 mx dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 mx dx = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos nx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \sin nx dx = 0 \quad (m \neq n)$$

und dann auf der rechten Seite gliedweise integrirt.

7) *Zu Seite 20.* Bei *Dirichlet* steht an dieser Stelle nicht $\frac{2}{k}$ sondern $\frac{\Delta}{k}$, wie auch überall in den weiteren Formeln.

8) *Zu Seite 27.* *C. Neumann* hat hierfür die Bezeichnung »monoton« eingeführt.

9) *Zu Seite 29.* An dieser Stelle wird also die Function φ der Bedingung unterworfen, dass sie »abtheilungsweise monoton und abtheilungsweise stetig« ist in dem ganzen Intervall (nach der Bezeichnung von *C. Neumann*). Diese Bedingungen hat man später als »die *Dirichlet*'schen Bedingungen« bezeichnet (vgl. die Einleitung). — Zum ersten Male hat *H. A. Schwarz* ein Beispiel einer stetigen Function gegeben, welche die *Dirichlet*'schen Bedingungen nicht erfüllt und sich auch nicht in eine *Fourier*'sche Reihe entwickeln lässt. (Das Beispiel ist veröffentlicht am Ende der Abhandlung von *A. Sachse.*)

Die Function $\varphi(x)$ wird durch folgende Festsetzung definirt. Man theile das Intervall von $\frac{\pi}{2}$ bis 0 in unendlich viele bis zur Null kleiner werdende Intervalle

$$\frac{\pi}{2} \cdots \frac{\pi}{[1]}, \frac{\pi}{[1]} \cdots \frac{\pi}{[2]}, \cdots, \frac{\pi}{[\lambda-1]} \cdots \frac{\pi}{[\lambda]}, \cdots, \frac{\pi}{[\mu]} \cdots 0,$$

wo zur Abkürzung

$$[\lambda] = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2\lambda + 1)$$

gesetzt ist, und $\lim \mu = \infty$ sein soll. Definirt man nun im λ-ten Intervalle die Function durch die Gleichung

$$\varphi(\beta) = \frac{1}{\sqrt{\log(\lambda + \frac{1}{2})}} \cdot \sin [\lambda]\beta,$$

so zeigt sich, dass das *Dirichlet*'sche Integral über alle Grenzen wächst, während doch

$$\operatorname*{Limes}_{\beta=0} \varphi(\beta) = 0 \quad \text{ist.}$$

10) *Zu Seite 33.* Als Beispiel einer *Fourier*'schen Entwicklung wollen wir die folgende wählen: Es soll die Function $\varphi(x)$ in eine trigonometrische Reihe entwickelt werden, wobei $\varphi(x)$ im Intervalle $-\pi$ bis 0 definirt ist durch die Gleichung

$$\varphi(x) = x + \frac{\pi}{2}$$

und im Intervalle 0 bis π durch die Gleichung

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{2} - x.$$

Für die Coefficienten ergeben sich die Formeln

$$b_0 = 0,$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)\cos m\beta\, d\beta + \int_{0}^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\cos m\beta\, d\beta\right] = 0, \quad m = 2n,$$

$$= \frac{4}{\pi m^2} \quad (m = 2n+1),$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)\sin m\beta\, d\beta + \int_{0}^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\sin m\beta\, d\beta\right] = 0.$$

Es kommt also die Reihe

$$\varphi(x) = \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \cdots\right).$$

Differenzirt man diese Entwicklung, so erhält man eine Reihe $\varphi_1(x)$, die von $x = -\pi$ bis $x = 0$ den Werth $+1$, von $x = 0$ bis $x = \pi$ den Werth -1 darstellt. Für $x = -\pi$, $x = 0$ und $x = +\pi$ muss sich das arithmetische Mittel aus den Sprungwerthen, also der Werth 0 ergeben.

Die Reihe ist

$$\varphi_1(x) = -\frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right)$$

und hat in der That für $x = 0$, $x = -\pi$ und $x = \pi$ den Werth Null.

Setzt man aber z. B. $x = -\frac{\pi}{2}$, so kommt

$$\varphi_1\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{4}{\pi}\left(-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots\right).$$

Die unendliche Reihe, welche in der Klammer steht, ist der negative Werth der *Leibniz*'schen Reihe für $\frac{\pi}{4}$, so dass sich in der That ergiebt:

$$\varphi_1\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{4}{\pi} \cdot -\frac{\pi}{4} = +1.$$

Auch für alle anderen zwischen $-\pi$ und 0 gelegenen Werthe des Argumentes hat $\varphi_1(x)$ diesen Werth. (Hieraus kann man unendlich viele Formeln zur Berechnung von $\frac{\pi}{4}$ ableiten.) Liegt x dagegen zwischen 0 und π, so ergiebt sich der Werth -1. Für $x = \frac{\pi}{2}$ kann man dies leicht bestätigen, denn es wird

$$\varphi_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \cdots\right) = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = -1.$$

11) *Zu Seite 36.* Vergleiche die Function $\varphi_1(x)$ in der vorigen Anmerkung.

12) *Zu Seite 36.* Für $x = 0$ hat das Integral den Werth Null, für positive Werthe von x den Werth $\frac{\pi}{2}$, für negative den Werth $-\frac{\pi}{2}$. (Vgl. z. B. *Serret*, Diff. und Integralrechnung, übersetzt von *A. Harnack*, zweite Auflage, Band II, Leipzig 1899, Nr. 471 und 487.)

13) *Zu Seite 37.* Ist z. B. bei der Reihenentwicklung von $\varphi_1(x)$ das Argument x von Null (oder von $\pm\pi$) sehr wenig verschieden, so weicht auch die Summe von sehr vielen aufeinander folgenden Gliedern von Null sehr wenig ab. Trotzdem hat die Summe den Werth $+1$, resp. -1.

14) *Zu Seite 37.* Die Functionen sollen also (wie in Anmerkung 9) abtheilungsweise stetig sein und nicht etwa

Unbestimmtheitsstellen haben (wie $\sin\frac{1}{x}$ für $x = 0$) oder unendlich werden.

15) *Zu Seite 41.* Betrachten wir z. B. die Reihe

$$f(x) = x + x(1-x) + x(1-x)^2 + x(1-x)^3 + \cdots$$

so convergirt sie, so lange $0 \leqq x < 2$ ist. Das Restglied hat den Werth

$$R_n(x) = \frac{x\cdot(1-x)^n}{1-(1-x)} = (1-x)^n.$$

Für jeden im Intervalle gelegenen Werth von x wird das Restglied mit zunehmendem n beliebig klein. Für $x = 0$ ist $R_n(x) = 0$, dagegen ist $\lim\limits_{n=\infty} R_n(2)$ nicht gleich Null. Die Reihe convergirt also auch noch für $x = 0$ (nicht dagegen für $x = 2$). Die Convergenz wird aber für $x = 0$ unendlich verzögert, denn es ist z. B. für

$$x = 1 - e^{-\frac{1}{n^2}},$$

$$R_n(x) = \left(e^{-\frac{1}{n^2}}\right)^n = e^{-\frac{1}{n}},$$

also bei hinreichend grossem n von 1 beliebig wenig verschieden.

Die Reihe ist unstetig für $x = 0$, wo sie den Werth Null annimmt; überall sonst hat sie den Werth 1.

16) *Zu Seite 44.* Als Beispiel einer Reihe mit unendlich verzögerter Convergenz, welche trotzdem eine stetige Function darstellt, sei das folgende von *Darboux* herrührende genannt:

$$f(x) = \sum_1^\infty u_n(x),$$

wo

$$u_n(x) = nxe^{-nx^2} - (n+1)xe^{-(n+1)x^2}$$

ist. Hier ist

$$R_n(x) = nxe^{-nx^2} \qquad \lim_{x=0,\, n=\infty} R_n(x) = 0.$$

Für $x = 0$ convergirt die Reihe beliebig langsam, denn es ist:

$$R_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n}\,e^{-1}.$$

Trotzdem ist die Reihe eine stetige Function; sie stellt immer, auch für $x = 0$ den Werth

$$x e^{-x^2}$$

dar. Die Stetigkeit beruht darauf, dass $\operatorname*{Limes}_{x=0,\, n=\infty} R_n(x) = 0$ ist.

17) *Zu Seite 45.* Als Beispiel hierfür eignet sich das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{\alpha} d\alpha .$$

Man kann hier direct einsehen, weshalb es keine stetige Function von x ist. Zerlegt man nämlich in zwei Theile

$$I = \int_0^\infty = \int_0^a + \int_a^\infty ,$$

so können wir schreiben

$$I(x) = \int_0^a \frac{\sin x\alpha}{\alpha} d\alpha + \int_a^\infty \frac{\sin \alpha x}{\alpha} d\alpha = I_1 + I_2 .$$

Das Integral I_2 lässt sich so umformen, indem man $\alpha x = \beta$ setzt:

$$I_2 = \int_{xa}^\infty \frac{\sin \beta}{\beta} d\beta .$$

Man erkennt, dass für $x = 0$ das Integral I_2 gleich

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha = \frac{\pi}{2}$$

wird, unabhängig davon, welchen Werth a hat.

Während also $I(0) = 0$ ist, ist

$$\operatorname*{Limes}_{x=0} I(x) = \operatorname*{Limes}_{x=0} I_1(x) + \operatorname*{Limes}_{x=0} I_2(x) = \frac{\pi}{2} .$$

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.